INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

1964～1968

第2卷

● 主　编　佩　捷

● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强





哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

由黑龙江省精品图书出版工程专项资金资助出版

国际数学奥林匹克竞赛系列

- IMO 50年.第1卷(1959~1963)
- IMO 50年.第2卷(1964~1968)
- IMO 50年.第3卷(1969~1973)
- IMO 50年.第4卷(1974~1978)
- IMO 50年.第5卷(1979~1983)
- IMO 50年.第6卷(1984~1988)
- IMO 50年.第7卷(1989~1993)
- IMO 50年.第8卷(1994~1998)
- IMO 50年.第9卷(1999~2003)
- IMO 50年.第10卷(2004~2008)

$\sum_{i=0}^{378}$ 刘培杰数学工作室

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾




哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：奥数类


ISBN 978-7-5603-4976-3
定价 28.00 元

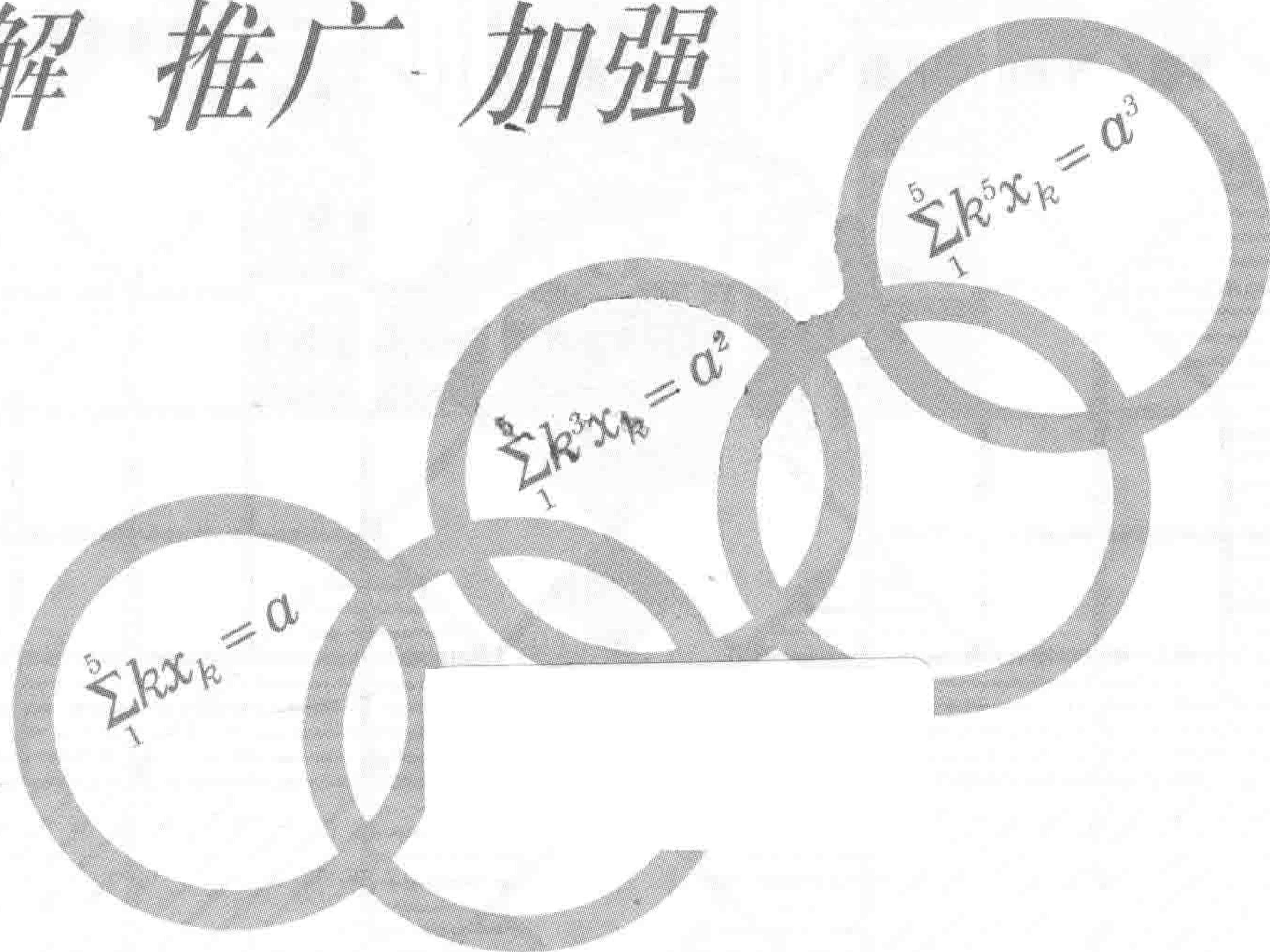
INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

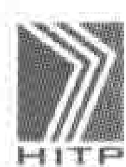
IMO 50年

1964～1968 第2卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解 推广 加强




HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第6届至第10届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第2卷，1964～1968/佩捷主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.11

ISBN 978－7－5603－4976－3

Ⅰ.①I…　Ⅱ.①佩…　Ⅲ.①中学数学课－题解
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第257424号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张12.25　字数227千字
版　　次　2014年11月第1版　2014年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4976－3
定　　价　28.00元

前 言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点:"若一个人不'精通数学',他就比别人笨吗"?

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是'精通数学'的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式."

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话."

"不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001,96)

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的,而是为那些对 IMO 感兴趣,对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供 20 余种不同解法,如第 3 届 IMO 第 2 题),给出加强形式,尽显推广空间,是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集,从现在看,以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用"系统论"研究射击训练的专家,他曾说:"世界上的很多新东西,其实不是'全新'的,就像美国的航天飞机,总共用了2万个已有的专利技术,真正的创造是它在总体设计上的新意."(胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社,1999,463)本书的编写又何尝不是如此呢,将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话,那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上,形式归于红线,价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生,他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者(1979年,笔者初中毕业,同学姜三勇(现为哈工大教授)作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》(定价仅0.29元),并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言:"科学有险阻,苦战能过关."27年过去仍记忆犹新).所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院(今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业读过)是我国最早介入IMO的高校之一,毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1~20届题解.令人惊奇的是,我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家"文化大革命"后北大的第一位博士张筑生教授,可惜天妒英才,张筑生教授英年早逝,令人扼腕(山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜,他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一).本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇,可以说上世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4],[13],[19],[20],[50].目前许多题解中给出的解法中规中矩,语言四平八稳,大有八股遗风,仿佛出自机器一般,而这几位专家的解答各有特色,颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生,考试时由于单墫基础扎实,毕业后一直在南京女子中学任教,所以按部就班,从前往后答,而李克正当时是南京市的一名工人,自学成才,答题是从后往前答,先答最难的一题,风格迥然不同,所给出的奥数题解也是个性化十足.另外,现在流行的IMO题解,历经

多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合，有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人. 使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折. 高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑. 所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延，而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势，他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用. 北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志. 如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础. 我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现. 为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生. 他们四位的长篇推广文章读之，使我不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候，曾有一句话讲得颇好：“一

个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰
2014 年 10 月

目录 Contest

第一编
第 6 届国际数学奥林匹克

第 6 届国际数学奥林匹克题解

苏联,1964

1 (1) 求所有的正整数 n,使得 2^n-1 能被 7 整除;
(2) 证明:对于任何正整数 n,2^n+1 不能被 7 整除.

捷克斯洛伐克命题

解法 1 (1) 任何一个正整数 n,皆可写成 $3m+k$ 形式,其中 $k=0,1,2$. 因为

$$2^3\equiv 1(\bmod 7)$$

故

$$2^{3m}\equiv 1(\bmod 7)$$

从而知当 $n=3m$ 时,2^n-1 能被 7 整除.

又因

$$2^{3m+1}\equiv 2(\bmod 7),2^{3m+2}\equiv 4(\bmod 7)$$

故仅当 $n=3m$ 时,2^n-1 能被 7 整除.

(2) 自(1) 知,对于所有正整数 n,2^n 除以 7 时其余数为 1,2 或 4. 故

$$2^n+1\equiv 2,3,5(\bmod 7)$$

这就是说 2^n+1 不能被 7 整除.

解法 2 (1) 若 m 是正整数或零,则

$$\begin{aligned}2^{3m}=(2^3)^m=(7+1)^m=&\\ 7^m+C_m^1\cdot 7^{m-1}+C_m^2\cdot 7^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}\cdot 7+1=&\\ 7M_0+1,M_0\in\mathbf{N}&\end{aligned}$$

由此

$$2^{3m+1}=2\cdot 2^{3m}=2(7M_0+1)=7M_1+2,M_1\in\mathbf{N}$$

$$2^{3m+2}=4\cdot 2^{3m}=4(7M_0+1)=7M_2+4,M_2\in\mathbf{N}$$

所以

$$2^n-1=\begin{cases}7M_0,当 n=3m 时\\ 7M_1+1,当 n=3m+1 时\\ 7M_2+3,当 n=3m+2 时\end{cases}$$

故当且仅当 n 是 3 的倍数时,2^n-1 能被 7 整除.

(2) 因为

$$2^n+1=\begin{cases}7M_0+2, 当\ n=3m\ 时\\7M_1+3, 当\ n=3m+1\ 时\\7M_2+5, 当\ n=3m+2\ 时\end{cases}$$

所以对于所有的正整数 n,2^n+1 都不能被 7 整除.

2 设 a,b,c 是任一三角形三边的长度,求证

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

匈牙利命题

证法 1 令

$$b+c-a=x, c+a-b=y, a+b-c=z \quad ①$$

因三角形两边长度之和大于第三边的长度,故 x,y,z 皆取正值,而且

$$\frac{1}{2}(x+y)=c, \frac{1}{2}(y+z)=a, \frac{1}{2}(z+x)=b$$

因算术中项不小于几何中项,故知

$$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx}=xyz$$

所以

$$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad ②$$

但不等式 ② 的右边等于

$$\begin{aligned}&(b+c-a)[a^2-(b-c)^2]=\\&a^2(b+c-a)-(b^2-c^2)(b-c)+a(b-c)^2=\\&a^2(b+c-a)-(b-c)[(b^2-c^2)-a(b-c)]=\\&a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc\end{aligned}$$

从而得到求证的不等式.

证法 2 设 $a\leqslant b\leqslant c$,则

$$c-a\geqslant b-a\geqslant 0\Rightarrow$$
$$c(c-b)(c-a)\geqslant b(c-b)(b-a)\geqslant 0$$

左边加 $a(a-b)(a-c)$(这个数大于等于 0),得

$$a(a-b)(a-c)+c(c-b)(c-a)+b(b-c)(b-a)\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)+3abc\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

证法 3 把求证的不等式的左边改写成

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$$

应用余弦定理,上式等于

$$\begin{aligned}&a(2bc\cdot\cos A)+b(2ca\cdot\cos B)+c(2ab\cdot\cos C)=\\&2abc(\cos A+\cos B+\cos C)\end{aligned}$$

假如任一角 C 是固定的，则 $\sin\frac{C}{2}$ 的值也是固定的. 故

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

当 $\cos\frac{A-B}{2}=1$，即 $A=B$ 时为最大. 从而可知 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的值，当 $A=B=C=60^\circ$ 时为最大. 这时

$$\cos A+\cos B+\cos C=3\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$$

故 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

证法 4　对于任意实数 a,b,c，有

$$(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0$$

又因 a,b,c 是某一三角形三边之长，所以有

$$b+c-a>0,c+a-b>0,a+b-c>0$$

从而可得

$$(b-c)^2(b+c-a)\geqslant 0$$
$$(c-a)^2(c+a-b)\geqslant 0$$
$$(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$$

将这三个不等式两边分别相加，得

$$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)\geqslant 0$$

即

$$6abc-2a^2(b+c-a)-2b^2(a+c-b)-2c^2(a+b-c)\geqslant 0$$

得

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

证法 5　不失一般性，设 $a\geqslant b\geqslant c$，且 $a=b+m,c=b-n$，其中，$m\geqslant 0,n\geqslant 0$. 因而只需证

$$(b+m)^2(b-m-n)+b^2(b+m-n)+(b-n)^2(b+m+n)\leqslant 3(b+m)b(b-n)$$

或

$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0$$

若 $m>n$，上面的不等式显然成立；

若 $m\leqslant n$，由 $a-c<b$ 或 $m+n<b$ 得

$$(n^2-m^2)[b-(m+n)]+b(2m^2+mn)\geqslant 0$$
$$b(2m^2+mn)+b(n^2-m^2)-(m+n)(n^2-m^2)\geqslant 0$$
$$b(m^2+mn+n^2)+(m+n)(m^2-n^2)\geqslant 0$$

故 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$

南斯拉夫命题

3 设圆 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,作三条分别平行于三角形各边的圆 I 的切线,这三条切线在三角形内截得三个新三角形,然后再作每个新三角形的内切圆. 求这四个内切圆的面积的和(用 $\triangle ABC$ 三边的长度表示所求的面积).

解法 1 如图 6.1 所示,在 $\triangle ABC$ 内作 $A_1A_2 \parallel BC$,$C_1C_2 \parallel AB$,$B_1B_2 \parallel CA$. 以 r,r_1,r_2,r_3 分别表示 $\triangle ABC$,$\triangle AA_1A_2$,$\triangle BB_1B_2$,$\triangle CC_1C_2$ 的内切圆的半径,a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 三边的长度,h_a,h_b,h_c 表示对应高,s 表示半周长. 则 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=rs=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

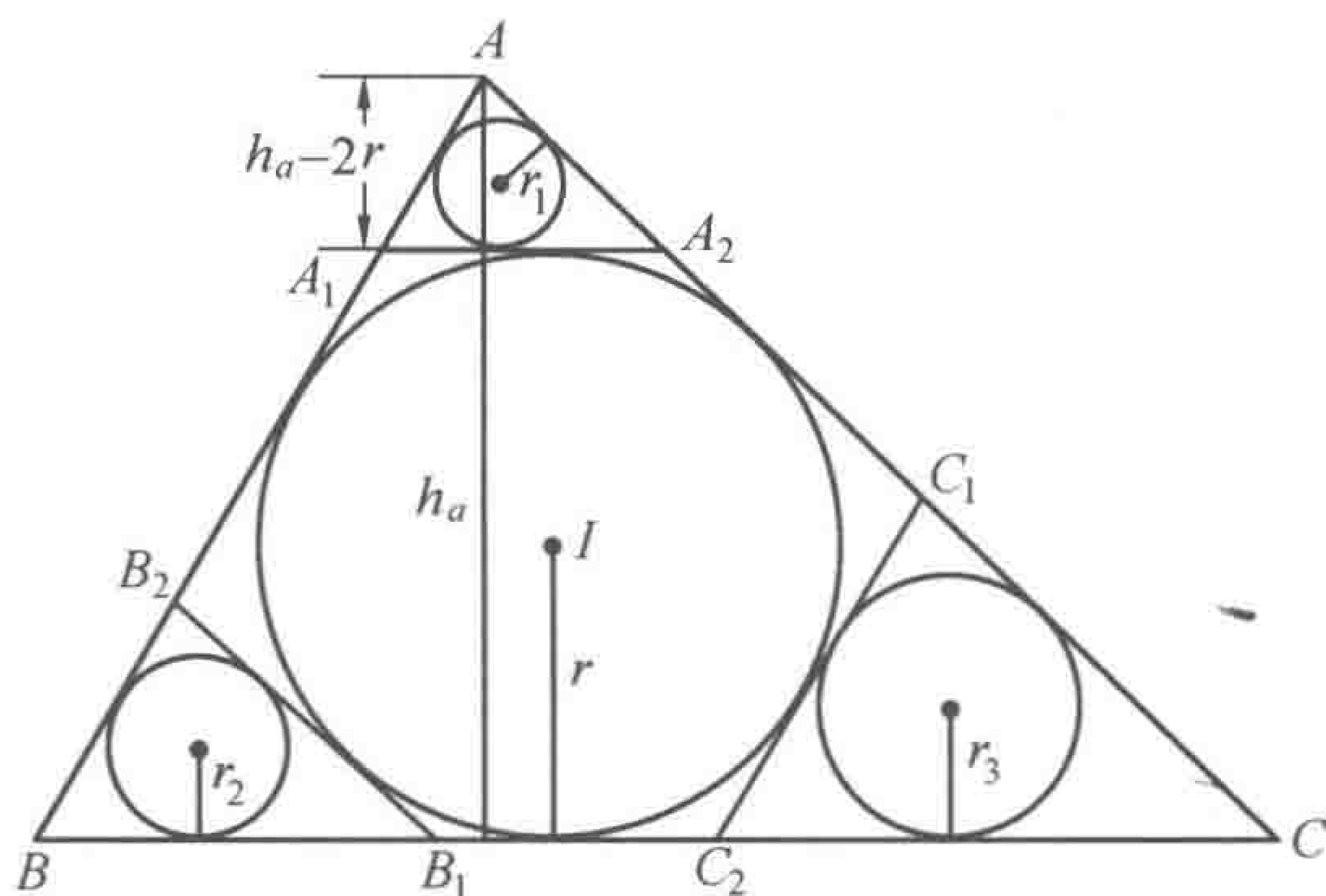


图 6.1

因为
$$\frac{r_1}{r}=\frac{h_a-2r}{h_a}=1-\frac{2r}{h_a}=1-\frac{a}{s}$$

所以
$$r_1=(1-\frac{a}{s})r$$

同理
$$r_2=(1-\frac{b}{s})r,r_3=(1-\frac{c}{s})r$$

所以所求的面积和等于

$$\pi(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2)=\pi r^2[1+(1-\frac{a}{s})^2+(1-\frac{b}{s})^2+(1-\frac{c}{s})^2]=\pi r^2[4-\frac{2(a+b+c)}{s}+\frac{a^2+b^2+c^2}{s^2}]=\frac{\pi r^2}{s^2}(a^2+b^2+c^2)$$

但
$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

代入上式可得所求的面积和等于

$$\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{s^3}$$

解法 2　用 $\triangle, s, \triangle_1, s_1, \triangle_2, s_2, \triangle_3, s_3$ 分别表示 $\triangle ABC$，$\triangle AB_1C_1$，$\triangle A_2BC_2$，$\triangle A_3B_3C$ 的面积和半周长.

因为 $\triangle A_3B_3C \backsim \triangle ABC$，所以

$$\frac{\triangle_3}{\triangle}=\frac{s_3^2}{s^2}, \triangle_3=\frac{s_3^2\triangle}{s^2}$$

由此，$\triangle A_3B_3C$ 的内切圆面积为

$$\frac{\pi\triangle_3^2}{s_3^2}=\frac{\pi\cdot\frac{s_3^4\triangle^2}{s^4}}{s_3^2}=\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_3^2$$

同理，$\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle A_2BC_2$ 的内切圆面积分别为 $\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_1^2$ 和 $\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_2^2$.

再注意到 $s_1=s-a, s_2=s-b, s_3=s-c$，可得题设四个圆的面积和为

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^2}+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_1^2+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_2^2+\frac{\pi\triangle^2}{s^4}\cdot s_3^2=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}(s^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2)=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}[s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2]=$$

$$\frac{\pi\triangle^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2)=$$

$$\frac{\pi(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{s^3}$$

4 十七个科学家中每一个和其余十六个通信，在他们的通信中所讨论的仅有三个问题，而任两个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

证明：至少有三个科学家通信时所讨论的是同一个问题.

匈牙利命题

证明　设 A 是这十七个科学家之一. 因为所讨论的问题仅有三个，所以根据抽屉原则，他和其他十六个中至少和六个科学家讨论同一个问题. 不妨设这六个科学家是 B，C，D，E，F，G，而所讨论的是问题甲.

如果在 B，C，D，E，F，G 这六个科学家中有二人所讨论的也是问题甲，则结论已成立. 否则他们之间所讨论的是另外两个问题. 这样，B 至少和三个科学家讨论同一个问题. 不妨设这三个科学家为 C，D，E，而所讨论的是问题乙.

如果在 C，D，E 中有两人所讨论的也是问题乙，则结论成立. 否则他们之间所讨论的只能是所剩下的问题丙，所以结论也成立.

罗马尼亚命题

5 在平面上给定五点，其中两两连线互不平行，互不垂直，也互不重合. 今过其中每一点作与其余各点连线的垂线. 试问若不计已知的五点，这些垂线的交点最多能有多少？

解法 1 设 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 是所给定的五点. 先考虑过点 A_1 和过点 A_2 所作的垂线. 就点 A_1 来说，可作其余四点的 $C_4^2=6$ 条连线的垂线；就点 A_2 来说，亦可作其余四点的 6 条连线的垂线. 在这两组垂线上，除同垂直于 A_3A_4，A_4A_5，A_5A_3 的三对直线因互相平行而没有交点外，共有 $6\times6-3=33$ 个交点.

从五点中任取两点，共有 $C_5^2=10$ 种取法. 因此交点的总数不多于 $10\times33=330$.

从五点中任取三点作三角形，共有 $C_5^3=10$ 种取法. 这些点在前面计算三次. 故交点的总数不多于 $330-2\times10=310$.

解法 2 从某一已知点与由其余四点两两联结所得的直线作垂线，由于四点中每两点连线有 $C_4^2=6$ 条，所以从某一已知点向这些直线作垂线共有 6 条，五个点总共可作 $5\times6=30$ 条垂线.

这 30 条垂线，如果两两相交于不同的点，则“交点”的个数为

$$C_{30}^2=435$$

但是，这些垂线中有些是不相交（平行）的，有些是相交于同一点甚至交于已知点的，对于这些情况应从上面的个数中除去.

对于联结任意两点的一条直线，其余三点向这条直线所作的三条垂线互相平行，它们两两的交点不存在，所以对每条这样的直线，上面多计入的“交点”有 $C_3^2=3$ 个，而这样的直线有 $C_5^2=10$ 条，所以总共应除去这样“交点”的个数为

$$10\times3=30$$

五个已知点中任意三点组成一个三角形，从这三点中任意一点向其他两点连线所作的三条垂线是这个三角形的三条高，它们实际上只交于一点，所以对每一个三角形多计入了$(C_3^2-1)=3-1=2$ 个“交点”，而这样的三角形有 $C_5^3=10$ 个，所以总共应除去这样“交点”的个数为

$$2\times10=20$$

从五个已知点中的任意一点作其余四点两两连线的垂线有 $C_4^2=6$ 条，这六条垂线都相交于这个已知点，所以对每一个已知点来说，上面多计算的“交点”有 $C_6^2=15$ 个，五个已知点总共应除去这样交点（重合于已知点）的个数为

$$5\times15=75$$

由此可得，符合题设要求的这些垂线的交点，最多的个数为

$$435-30-20-75=310$$

6 已知一个四面体 $ABCD$，DD_1 是顶点 D 和底面 $\triangle ABC$ 的重心 D_1 的连线. 过 A,B,C 三点作 DD_1 的平行线分别与该点相对的面相交于点 A_1,B_1,C_1. 证明：四面体 $ABCD$ 的体积是四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积的 1/3. 当点 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任意点时，结果会是怎样呢？

波兰命题

证法1 在四面体 $ABCD$ 中，作 AA_1,BB_1,CC_1 与 DD_1 平行，如图6.2所示. AA_1 交 $\triangle BCD$ 所在的平面于点 A_1，故由 AA_1，DD_1 所确定的平面通过 $\triangle ABC$ 的中线 AM. 所以

$$\triangle MAA_1 \backsim \triangle MDD_1$$

因 $MA=3MD_1$（D_1 是 $\triangle ABC$ 的重心），故

$$AA_1=3DD_1$$

同理 $$BB_1=3DD_1, CC_1=3DD_1$$

所以 $AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1A_1A$ 皆是平行四边形，而且

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$$

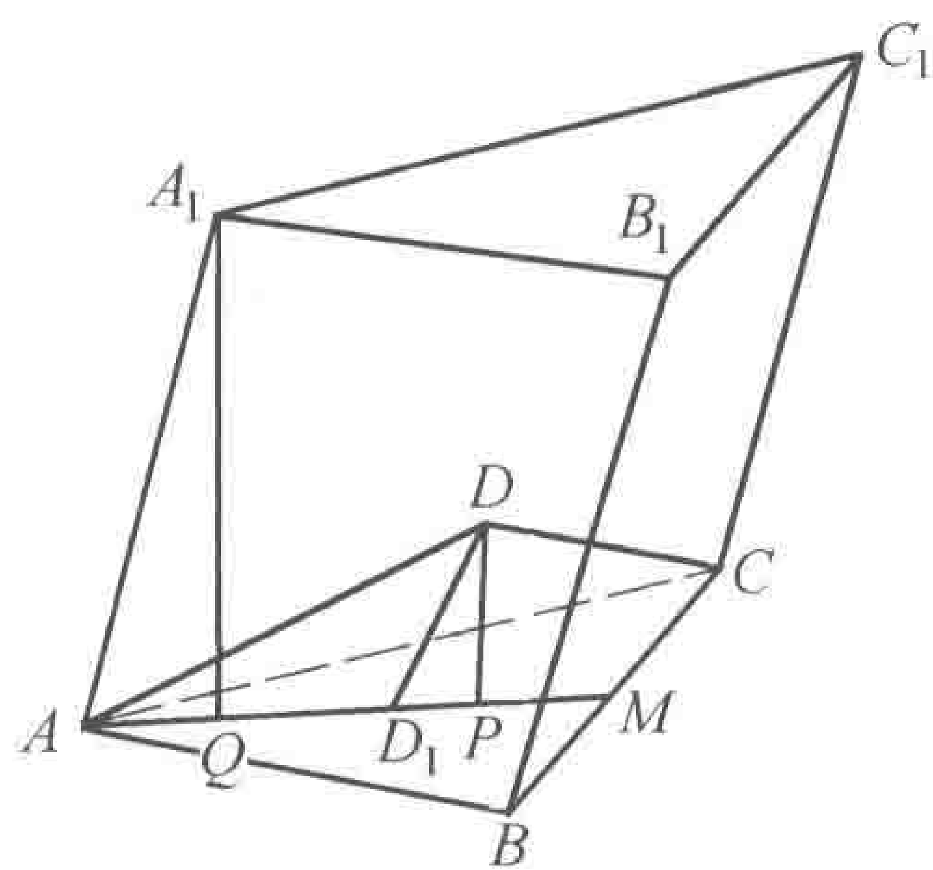


图6.2

过点 D 和 A_1 分别作 DP，A_1Q 垂直于底平面，并以 h,h_1 表示这两条垂线的长度. 因 $\triangle A_1AQ \backsim \triangle DD_1P$，故

$$h_1/h=AA_1/DD_1=3 \Rightarrow h_1=3h$$

用 V_{ABCD} 表示四面体 $ABCD$ 的体积，则

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}hS_{\triangle ABC}$$

所以 $$V_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}h_1S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot 3hS_{\triangle ABC}=3V_{ABCD}$$

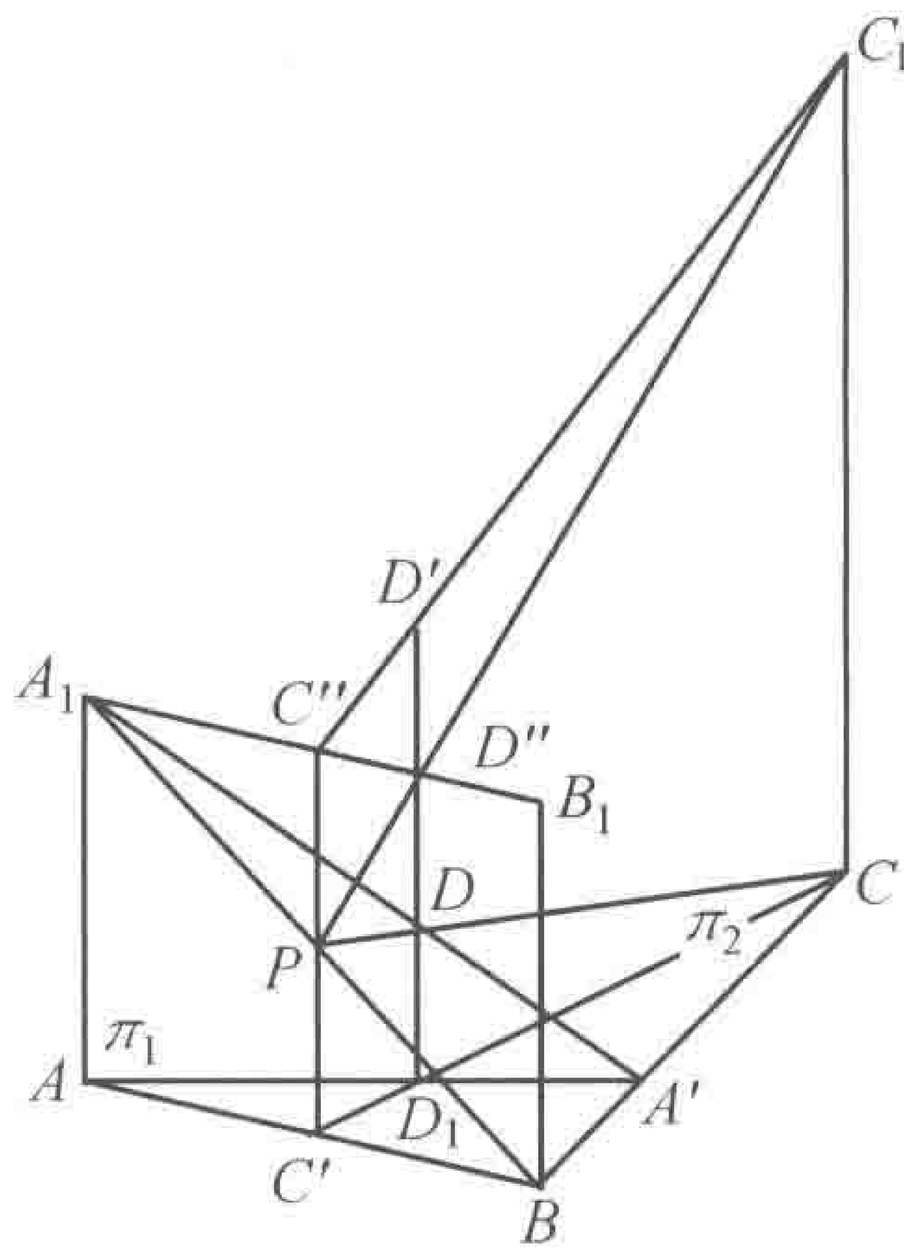


图6.3

现在考虑当 D_1 不是 $\triangle ABC$ 的重心时的情形，如图6.3所示. 设 AD_1 交 BC 于点 A'，CD_1 交 AB 于点 C'，并设过点 A,B 而平行于 DD_1 的平面为 π_1，过点 B,C 与 D 的平面为 π_2. 显然 A,A_1,D，D_1 与 A' 在同一个平面上，点 A_1,D 与 A' 在平面 π_2 上，A_1 是 $A'D$ 和 AA_1 的交点. 所以 BA_1 是 π_1 和 π_2 的交线.

直线 DC 不平行于 π_1 而交 π_1 于点 P，因为 C,D,D_1,C' 与 P 在同一个平面上，且 DD_1 平行于 π_1，故 DD_1 平行于 PC'. AP 与 A，C,D 在同一个平面上，所以 A,P,B_1 在同一直线上.

$C'D$ 与 A,B,D 在同一个平面上，所以 C',D,C_1 也是同一直线上的点. 设 $C'P$ 交 A_1B_1 于一点 C''，DD_1 交 $C''C_1$ 于一点 D'. 故 D_1D' 与 C_1P 的交点存在，以 D'' 表示.

四边形 ABB_1A_1 是一个梯形. P 是其对角线的交点. 由于 $C'C''$ 平行于 AA_1，故 $C'P=PC''$. 因此在梯形 $C'CC_1C''$ 中

$$D_1D = DD'' = D''D'$$

从而有 $$D_1D' = 3DD_1$$

四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的体积

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = V_{A_1B_1D'D_1} + V_{B_1C_1D'D_1} + V_{C_1A_1D'D_1} =$$
$$V_{ABD_1D'} + V_{BCD_1D'} + V_{CAD_1D'} = V_{ABCD'}$$

根据关系式 $D_1D' = 3DD_1$ 得

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$$

证法 2 本题只要 D_1 不是 $\triangle ABC$ 的边上或其延长线上的点，皆能成立. 其简捷的证法要用矩阵的行列式.

我们以四面体 $ABCD$ 的顶点 D 为空间直角坐标系的原点，并分别以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 表示向量$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$. 根据空间解析几何的定理知

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$$

其中，$\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 表示矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的行列式.

若 D_1 在 $\triangle ABC$ 所在的平面上，则

$$\boldsymbol{D}_1 = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C}, a + b + c = 1 \quad ①$$

其中，$\boldsymbol{D}_1$ 表示向量$\overrightarrow{DD_1}$. 若 D_1 不在 $\triangle ABC$ 的边上或其延长线上，则 $abc \neq 0$.

设 A_t 是过 A 而平行于$\overrightarrow{DD_1}$ 的直线上的任意点，则 $\boldsymbol{A}_t$(即向量$\overrightarrow{DA_t}$) 可表示为

$$\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{A} + t(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} + c\boldsymbol{C}) = (1 + at)\boldsymbol{A} + bt\boldsymbol{B} + ct\boldsymbol{C}$$

其中，t 是参数. 若 $\boldsymbol{A}$ 的系数为 0，则此向量的终点在 $\triangle BCD$ 所在的平面上. 此时 $t = -\frac{1}{a}$，故

$$\boldsymbol{A}_1 = -\frac{b}{a}\boldsymbol{B} - \frac{c}{a}\boldsymbol{C} \quad ②$$

同理

$$\boldsymbol{B}_1 = -\frac{a}{b}\boldsymbol{A} - \frac{c}{b}\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}_1 = -\frac{a}{c}\boldsymbol{A} - \frac{b}{c}\boldsymbol{B} \quad ③$$

所以 $$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{6}\det(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{D}_1)$$

由式 ①,②,③ 知

$$\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{D}_1 = -a\boldsymbol{A} - (\frac{b}{a} + b)\boldsymbol{B} - (\frac{c}{a} + c)\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{D}_1 = -(\frac{a}{b} + a)\boldsymbol{A} - b\boldsymbol{B} - (\frac{c}{b} + c)\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{D}_1 = -(\frac{a}{c} + a)\boldsymbol{A} - (\frac{b}{c} + b)\boldsymbol{B} - c\boldsymbol{C}$$

令

$$M=\begin{pmatrix} a & \frac{a}{b}+a & \frac{a}{c}+a \\ \frac{b}{a}+b & b & \frac{b}{c}+b \\ \frac{c}{a}+c & \frac{c}{b}+c & c \end{pmatrix}$$

则 $$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})(\boldsymbol{M})=-(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1)$$

因两矩阵之积的行列式等于该两矩阵的行列式之积.故

$$|\det(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\cdot\det(\boldsymbol{M})|=|\det(\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_1)|$$

又因为 $$\det(\boldsymbol{M})=2+a+b+c=3$$

故得 $$3V_{ABCD}=V_{A_1B_1C_1D_1}$$

证法 3 设 D_1 是 $\triangle ABC$ 的重心,联结 BD_1 并延长交 AC 于 E,如图 6.4 所示,则点 E 是 AC 的中点,且

$$BE:D_1E=3:1$$

过 E,D_1,D 三点作一个平面.因为点 B 在 ED_1 上,所以它在平面 ED_1D 上.又因为 $BB_1 /\!/ D_1D$,所以 BB_1 在平面 ED_1D 上.

在平面 ED_1D 上,直线 BB_1 与直线 ED 必相交,其交点也就是 BB_1 与平面 ADC 的交点 B_1.这就是说,E,D,B_1 三点在同一直线上.

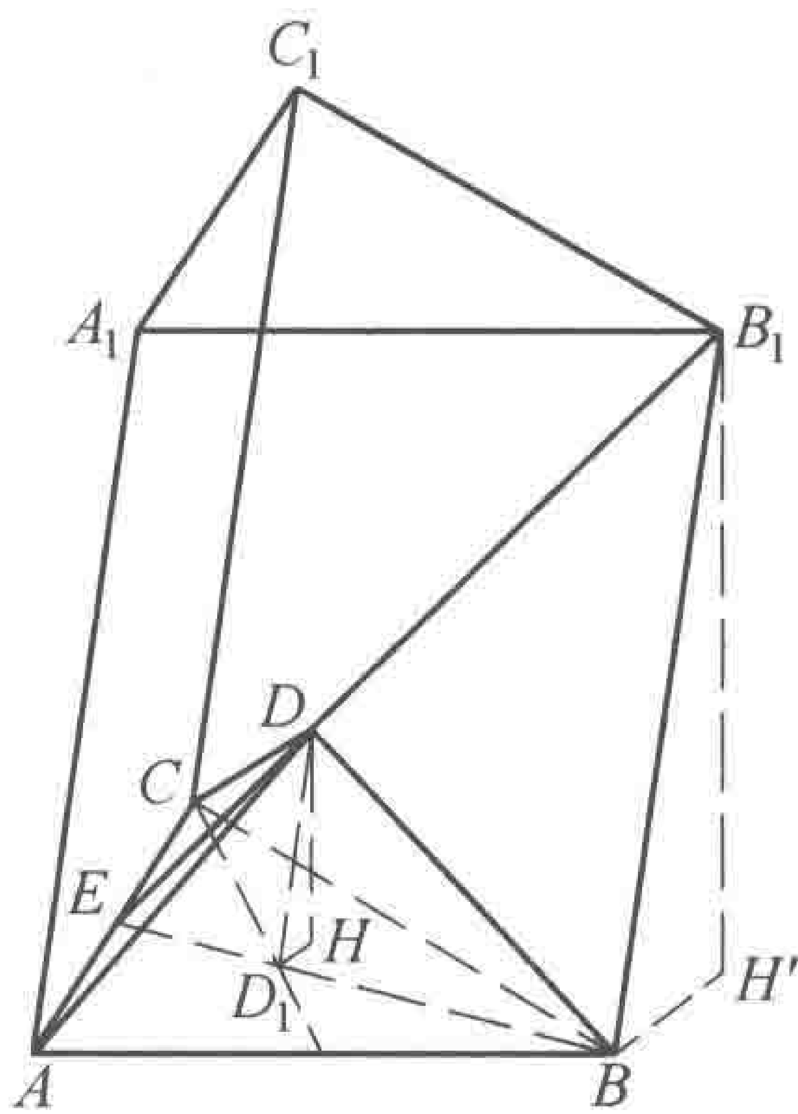


图 6.4

在 $\triangle EBB_1$ 中,由 $BB_1 /\!/ DD_1$ 可得

$$BB_1:D_1D=BE:D_1E=3:1$$

即 $$BB_1=3D_1D$$

同理 $$AA_1=3D_1D,CC_1=3D_1D$$

故 $$AA_1=BB_1=CC_1=3D_1D$$

又因 $AA_1 /\!/ BB_1 /\!/ CC_1 /\!/ D_1D$,所以四边形 A_1ABB_1,A_1ACC_1,B_1BCC_1 都是平行四边形,从而平面 $A_1B_1C_1 /\!/$ 平面 ABC,并且

$$A_1B_1=AB,B_1C_1=BC,C_1A_1=CA$$

所以

$$\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle ABC \quad ④$$

过点 D 作 $DH\perp$ 平面 ABC,垂足为 H;过点 B_1 作 $B_1H'\perp$ 平面 ABC,垂足为 H'.有

$$\angle BH'B_1=\angle D_1HD=90^\circ$$

因为 $BB_1 /\!/ D_1D,B_1H' /\!/ DH$,所以

$$\angle BB_1H'=\angle D_1DH$$

所以 $$\triangle BH'B_1\backsim\triangle D_1HD$$

所以 $$B_1H':DH=BB_1:D_1D=3:1$$

即

$$B_1H' = 3DH \quad ⑤$$

由式 ④,⑤ 即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$$

如果点 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点，上述结论仍然是成立的. 证明如下，如图 6.5 所示.

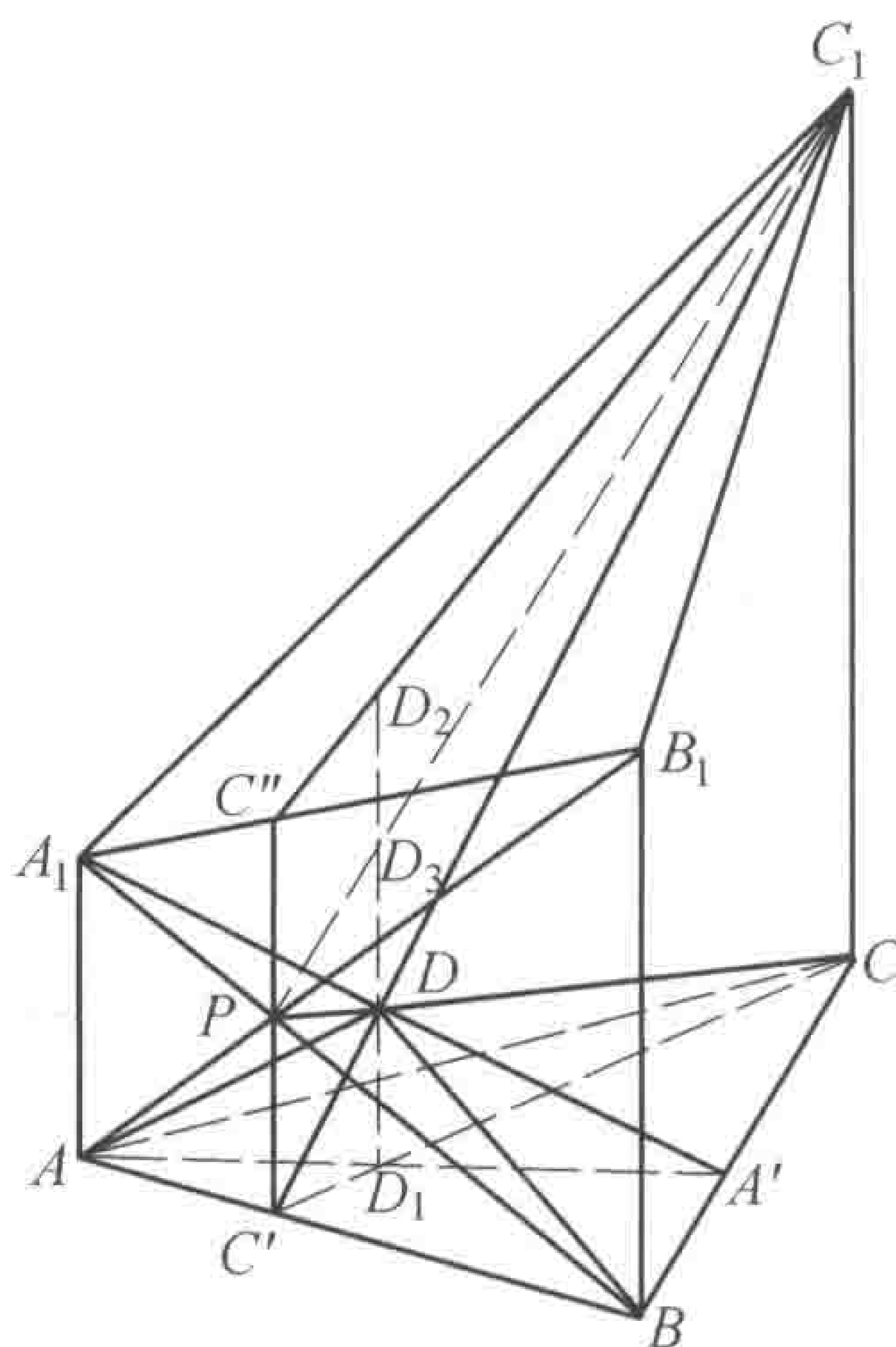


图 6.5

在平面 ABC 上，联结 AD_1 交 BC 于 A'，联结 CD_1 交 AB 于 C'.

过 A'，D_1，D 三点作一个平面，因为 A 在 $A'D_1$ 上，且 $AA_1 \parallel D_1D$，所以 AA_1 在平面 $A'D_1D$ 上，直线 AA_1 与 $A'D$ 必相交，其交点也就是直线 AA_1 与平面 BCD 的交点 A_1，即 A'，D，A_1 三点在一条直线上.

过 C，D_1，D 三点作一个平面. 因为点 C' 在 CD_1 上，且 C' 在 AB 上，所以平面 CD_1D 与平面 ABA_1 必交于过点 C' 的一条直线 $C'P$，设直线 CD 与这条交线 $C'P$ 相交于点 P. 又由 $D_1D \parallel AA_1$ 可得 $DD_1 \parallel$ 平面 ABA_1，从而 $C'P \parallel D_1D$.

因为 $BB_1 \parallel AA_1 \parallel D_1D$，所以 BB_1 在平面 ABA_1 上，直线 BB_1 与 AP 必相交. 由于 AP 在平面 ACD 上，所以直线 BB_1 与 AP 的交点，也就是 BB_1 与平面 ACD 的交点 B_1，即 A，P，B_1 三点共线.

同理可证 C'，D，C_1 三点共线；A_1，P，B 三点共线.

因为 $AA_1 \parallel BB_1$，它们都在平面 ABA_1 上，$C'P$ 与 A_1B_1 相交，设交点为 C''. 四边形 A_1ABB_1 是梯形，点 P 是梯形对角线的交点，且 $C'C'' \parallel AA_1 \parallel BB_1$（都平行于 D_1D），所以 $C'P = PC''$.

因为 $C'C'' \parallel D_1D \parallel CC_1$，它们都在平面 CD_1D 上，设 $C''C_1$ 与直线 D_1D 相交于点 D_2，PC_1 与 D_1D 相交于点 D_3. 在梯形 $C''C'CC_1$ 中，$D_1D_2 \parallel C'C'' \parallel CC_1$，$C'P = PC''$，$D$，$D_3$ 分别是 PC，PC_1 与 D_1D_2 的交点，点 D 还是梯形 $PC'CC_1$ 对角线的交点，所以有

$$D_1D = DD_3 = D_3D_2$$

即有 $$D_1D_2 = 3D_1D$$

从而不难证明 $$V_{ABCD_2} = 3V_{ABCD}$$

又因 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel D_1D_2$，所以四面体 $A_1B_1D_2D_1$ 与四面体 ABD_1D_2 有相等的底面积，即

$$S_{\triangle A_1D_1D_2} = S_{\triangle AD_2D_1}$$

与相等的高（都等于直线 BB_1 和平面 $AD_1D_2A_1$ 间的距离），因此它们的体积相等，即

$$V_{A_1B_1D_2D_1} = V_{ABD_1D_2}$$

同理可得 $$V_{B_1C_1D_2D_1} = V_{BCD_1D_2}, V_{C_1A_1D_2D_1} = V_{CAD_1D_2}$$

所以 $$V_{A_1B_1C_1D_1} = V_{A_1B_1D_2D_1} + V_{B_1C_1D_2D_1} + V_{C_1A_1D_2D_1} =$$

$$V_{ABD_1D_2}+V_{BCD_1D_2}+V_{CAD_1D_2}=$$
$$V_{ABCD_2}=3V_{ABCD}$$

证法 4　我们也可以利用物理学上质点重心的有关知识来证明本题的结论. 现就一般情况证明如下.

如图 6.6 所示，设 D_1 是 $\triangle ABC$ 内的任一点，在底面 $\triangle ABC$ 内，联结 AD_1，BD_1，CD_1，并分别延长与对边相交于 A'，B'，C'. 如前所证，必有 A'，D，A_1 三点共线(在一直线上)，B'，D，B_1 三点共线，C'，D，C_1 三点共线.

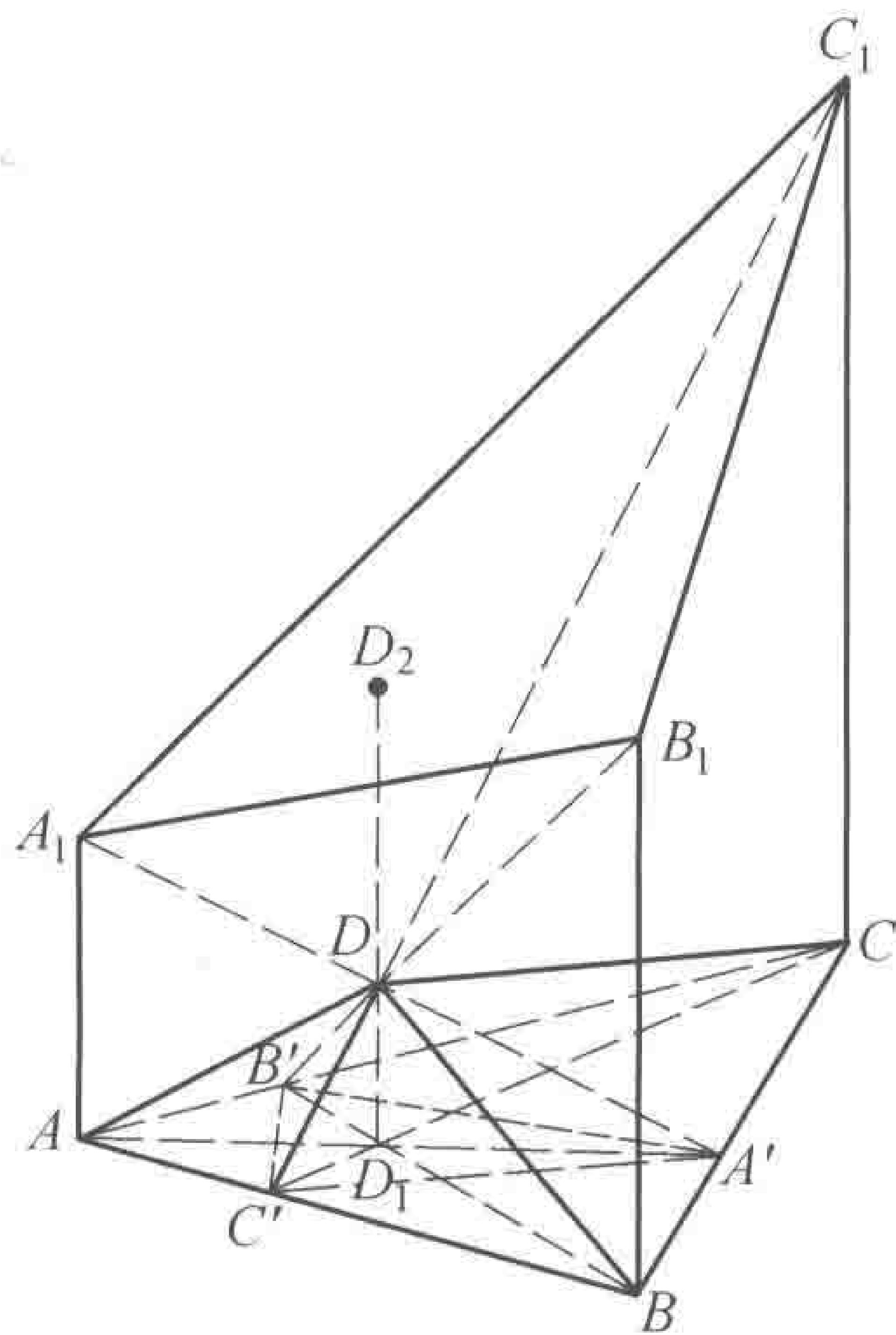


图 6.6

在 A，B，C 三点分别放置适当的质量 x，y，z，使 A，B，C 三质点的重心为点 D_1. 这时，点 C' 可看成是点 A(质量 x) 与点 B(质量 y) 的重心，点 A' 可看成是点 B(质量 y) 与点 C(质量 z) 的重心，点 B' 可看成是点 C(质量 z) 与点 A(质量 x) 的重心. 而点 D_1 既可以看成是点 A(质量 x) 与 A'(质量 $y+z$) 的重心，也可以看成是点 B(质量 y) 与 B'(质量 $z+x$) 的重心，还可以看成是点 C(质量 z) 与 C'(质量 $x+y$) 的重心. 由重心的性质，应有

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{z}{x},\frac{CA'}{A'B}=\frac{y}{z},\frac{BC'}{C'A}=\frac{x}{y}$$

我们可取 $x=B'C$，$z=AB'$，$y=\dfrac{CA'}{A'B}\cdot AB'$，便能满足要求.

因为

$$\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}=\frac{AB'}{AC}\cdot\frac{AC'}{AB}$$

而

$$\frac{AB'}{AC}=\frac{AB'}{AB'+B'C}=\frac{z}{x+z}$$

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{AC'}{AC'+C'B}=\frac{y}{x+y}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle AB'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle BC'A'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{zx}{(y+z)(y+x)}$$

$$\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xy}{(z+x)(z+y)}$$

因此

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AB'C'}-S_{\triangle BC'A'}-S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle ABC}}=$$
$$1-\frac{yz}{(x+y)(x+z)}-\frac{zx}{(y+z)(y+x)}-$$
$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

由于四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $ABCD$ 有相同的高，所以它们的体积之比等于底面积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad ⑥$$

又 $$\frac{A'D}{DA_1}=\frac{A'D_1}{D_1A}=\frac{x}{y+z}$$

同理 $$\frac{B'D}{DB_1}=\frac{y}{z+x},\frac{C'D}{DC_1}=\frac{z}{x+y}$$

由于三面角 $D-A'B'C'$ 与三面角 $D-A_1B_1C_1$ 全等，所以四面体 $A'B'C'D$ 与四面体 $A_1B_1C_1D$ 的体积之比等于对应的三条侧棱乘积之比，即有

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{DA'\cdot DB'\cdot DC'}{DA_1\cdot DB_1\cdot DC_1}=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)} \quad ⑦$$

由式 ⑥，⑦ 可得

$$V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD} \quad ⑧$$

为证明本题结论（$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$），我们进一步来证明 $V_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{3}{2}V_{A_1B_1C_1D}$. 在 $\triangle A'B'C'$ 的三顶点 A'，B'，C' 分别放置质量 $\frac{y+z}{2}$，$\frac{z+x}{2}$，$\frac{x+y}{2}$，这时 A'，B'，C' 三质点的重心也就在点 D_1. 再在点 A_1，B_1，C_1 三点分别放置适当的质量，使点 D 恰为各对质点 A_1 与 A'，B_1 与 B'，C_1 与 C' 的重心. 因为

$$\frac{A_1D}{DA'}=\frac{y+z}{x},\frac{B_1D}{DB'}=\frac{z+x}{y},\frac{C_1D}{DC'}=\frac{x+y}{z}$$

所以 A_1，B_1，C_1 三点放置的质量应分别为 $\frac{x}{2}$，$\frac{y}{2}$，$\frac{z}{2}$.

这样，点 D 是点 $A'\left(质量\frac{y+z}{2}\right)$ 与 $A_1\left(质量\frac{x}{2}\right)$ 的重心，也是点 $B'\left(质量\frac{z+x}{2}\right)$ 与 $B_1\left(质量\frac{y}{2}\right)$ 的重心，还是点 $C'\left(质量\frac{x+y}{2}\right)$ 与 $C_1\left(质量\frac{z}{2}\right)$ 的重心. 设 A_1，B_1，C_1 三点的重心为 D_2，显然它在平面 $A_1B_1C_1$ 上. 而 D_1 是 A'，B'，C' 三点的重心，所以点 D 可以看成是 D_1 与 D_2 两质点的重心，点 D_2 在直线 D_1D 上，并且这时在点 D_1 相当于集中了点 A'，B'，C' 的总质量 $x+y+z$，在点 D_2 相当于集中了点 A_1，B_1，C_1 的总质量 $\frac{x+y+z}{2}$，因此

$$\frac{D_1D}{DD_2}=\frac{(x+y+z)/2}{x+y+z}=\frac{1}{2}$$

所以 $$\frac{D_1D_2}{DD_2}=\frac{D_1D+DD_2}{DD_2}=\frac{3}{2}$$

由此可知，从点 D_1 与 D 分别到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离之比等于 $\frac{3}{2}$.

四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 与四面体 $A_1B_1C_1D$ 具有同一底面 $\triangle A_1B_1C_1$，而对应高之比为$\frac{3}{2}$，所以有

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{3}{2} \qquad ⑨$$

由式⑧，⑨即得

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$$

第 6 届国际数学奥林匹克英文原题

The sixth International Mathematical Olympiad was held from June 30th to July 10th 1964 in the city of Moscow.

1 a) Find all positive integers n such that 7 divides 2^n-1.

b) Prove that for any positive integer n the number 2^n+1 can not be divisible by 7.

(Czechoslovakia)

2 Let a,b,c be lengths of the sides of a triangle. Show that

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc$$

(Hungary)

3 Let ABC be a triangle and let a,b,c be lengths of its sides. The tangent lines to the incircle of the triangle which are parallel with the sides of the triangle cut in the triangle ABC three small triangles. In each small triangle its incircle is considered.

Find the sum of the areas of the four inscribed circles.

(Yugoslavia)

4 In a group of 17 scientists each scientist sends letters to the others. In their letters only three topics are involved and each couple of scientists makes reference to one topic only. Show that there exists a group of three scientists which send each other letters on the same topic.

(Hungary)

5 We are given five points in a plane. It is supposed that the set of the lines determined by the pairs of distinct points does not contain parallel lines, perpendicular lines or identical lines. In each point consider the perpendicular lines to the lines determined by other four points. Find the maximal number of intersection points of all perpendicular lines from

(Romania)

above, without considering, eventually, the five given points.

6 Let $ABCD$ be a tetrahedron and let D_1 be the barycenter of the face ABC. The lines through A, B, C parallel to DD_1 intersect the opposite faces in the points A_1, B_1, C_1, respectively. Show that the volume of the tetrahedron ABC is a third of the volume of the tetrahedron $A_1B_1C_1D_1$.

Does this result remain valid when D_1 is an arbitrary interior point of the face ABC?

(Poland)

第 6 届国际数学奥林匹克各国成绩表

1964，苏联

名次	国家或地区	分数（满分 336）	金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
1.	苏联	269	3	1	3	8
2.	匈牙利	253	3	1	1	8
3.	罗马尼亚	213	—	2	3	8
4.	波兰	209	1	1	3	8
5.	保加利亚	198	—	—	3	8
6.	德意志民主共和国	196	—	1	2	8
7.	捷克斯洛伐克	194	—	2	2	8
8.	蒙古	169	—	—	1	8
9.	南斯拉夫	155	—	1	1	8

第二编
第7届国际数学奥林匹克

第 7 届国际数学奥林匹克题解

民主德国,1965

1 求出区间$[0,2\pi]$内所有能满足下面不等式的实数 x

$$2\cos x \leqslant \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leqslant \sqrt{2}$$

南斯拉夫命题

解 原不等式可以改写为

$$2\cos x \leqslant \left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \qquad ①$$

$$\left| \sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x} \right| \leqslant \sqrt{2} \qquad ②$$

先解不等式 ①. 因为不等式 ① 的右边总是非负数,所以如果 $\cos x \leqslant 0$,即

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \qquad ③$$

不等式 ① 总是成立的;

如果 $\cos x > 0$,将不等式 ① 两边平方,得

$$4\cos^2 x \leqslant 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x}$$

$$\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 1 - 2\cos^2 x$$

$$|\cos 2x| \leqslant -\cos 2x$$

所以
$$\cos 2x \leqslant 0$$

所以
$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

所以
$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k\pi, k=0,1$$

于是,当 $\cos x > 0$ 时能使不等式 ① 成立的 x 值为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4} \qquad ④$$

综合 ③,④ 得不等式 ① 的解为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$$

再考虑不等式 ②. 它的两边都是非负数,分别平方,得

$$2 - 2\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 2, -2\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 0$$

它对任意实数 x 都是成立的.

因此,原不等式的解为

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$$

波兰命题

2 给出方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

其系数满足下列条件:

(1)a_{11}, a_{22}, a_{33} 是正的;

(2) 所有其他的系数都是负的;

(3) 每一个方程中的系数之和是正的.

证明:$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是这个方程组的唯一解.

证法 1 假设 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 不是原方程组的唯一解,则其非平凡解有如下两种可能情形.

i 某个数 x_i 是正的.

不失一般性,可设 $x_1 > 0, x_1 \geqslant x_2, x_1 \geqslant x_3$. 由

$$a_{12}x_2 \geqslant a_{12}x_1, a_{13}x_3 \geqslant a_{13}x_1, a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$$

得
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geqslant (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 > 0.$$

引出一个矛盾,所以这种情形不会出现.

ii 某个数 x_i 是负的.

不失一般性,可设 $x_1 < 0, x_1 \leqslant x_2, x_1 \leqslant x_3$. 由

$$a_{12}x_2 \leqslant a_{12}x_1, a_{13}x_3 \leqslant a_{13}x_1, a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$$

得
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant (a_{11} + a_{12} + a_{13})x_1 < 0$$

这也引出一个矛盾,所以这种情形也不会出现.

综上所证,可知 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是原方程组的唯一解.

证法 2 n 元线性齐次方程组有非平凡解的必要条件是其系数行列式等于 0.

用 $\triangle$ 表示本题方程组的系数行列式,即

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

要证 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是方程组的唯一解,只需证明 $\triangle \neq 0$.

在 $\triangle$ 中,第三列各数以 $s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$ 代换,其值不变,故

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & s_3 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + s_2 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + s_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

由条件(1),(2) 可知

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} > 0$$

又 $$a_{11} > -a_{12} - a_{13} > -a_{12} \Rightarrow a_{11} > |a_{12}|$$

$$a_{22} > -a_{21} - a_{31} > -a_{21} \Rightarrow a_{22} > |a_{21}|$$

故 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

最后由条件(3) 可知 $s_i > 0$,从而证明了 $\triangle > 0$.

证法 3 用反证法,如果有不全为零的解:$x_1 = k_1, x_2 = k_2, x_3 = k_3$. 则 $|k_1|, |k_2|, |k_3|$ 中必有最大者,不失一般性,不妨设

$$\max\{|k_1|, |k_2|, |k_3|\} = |k_1|, k_1 \neq 0$$

因 $$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0$$

所以 $$a_{11} = -\frac{k_2}{k_1}a_{12} - \frac{k_3}{k_1}a_{13}$$

从而 $$|a_{11}| = \left|-\frac{k_2}{k_1}a_{12} - \frac{k_3}{k_1}a_{13}\right| \leqslant$$

$$\left|\frac{k_2}{k_1}\right| \cdot |a_{12}| + \left|\frac{k_3}{k_1}\right| \cdot |a_{13}| \leqslant |a_{12}| \cdot |a_{13}|$$

由条件(1),(2) 知 $a_{11} > 0, a_{12} < 0, a_{13} < 0$. 所以

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} \leqslant 0$$

这与条件(3) 矛盾. 因此方程组有唯一解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3 已知一个四面体 $ABCD$ 的棱 AB,CD 的长度分别为 a,b. 这两棱间的距离为 d,交角为 ω. 该四面体被一个平行于 AB,CD 的平面 π 截成两部分. 已知 AB,CD 到平面 π 的距离之比为 k,求这两部分的体积的比.

捷克斯洛伐克命题

解法 1 若一个多面体的所有顶点都在两个平行的平面上,如图 7.1 所示,上底和下底的面积分别为 A_1,A_2,高为 h,它的中截面的面积为 M. 根据立体几何的定理,这个多面体的体积为

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4M) \quad ①$$

这种多面体,叫做拟柱*.

* 一般书多称"拟柱",事实上要称"拟棱台"比较适当.

设平行于 AB,CD 的平面 π 和四面体 $ABCD$ 的截面为 $PQRS$,其中 $PQ \parallel SR \parallel CD$,$QR \parallel PS \parallel AB$. T_1 表示以 $PQRS$ 为下底,线段 AB 为上底,高为 m 的拟柱;T_2 表示以 $PQRS$ 为上

底，线段 CD 为下底，高为 n 的拟柱. 根据题意

$$m+n=d, m/n=k \qquad ②$$

T_1, T_2 的体积分别用 V_1, V_2 表示.

▱$PQRS$ 的面积

$$S_{PQRS}=PQ \cdot QR \cdot \sin\omega$$

但是 $$PQ=\frac{m}{d}\cdot DC=\frac{mb}{d}, QR=\frac{n}{d}\cdot AB=\frac{na}{d}$$

所以 $$S_{PQRS}=\frac{mnab}{d^2}\cdot\sin\omega$$

平行于 AB 及 $PQRS$，且在其中间的平面为 $P'Q'R'S'$，其面积为

$$M_1=\frac{1}{2}PQ\left(\frac{QR+a}{2}\right)\sin\omega=$$

$$\frac{mb}{4d}\left(\frac{na}{d}+a\right)\sin\omega=\frac{mab}{4d^2}(n+d)\sin\omega$$

同样求得平行于 $PQRS$ 及 CD，且在其中间的平面的面积为

$$M_2=\frac{nab}{4d^2}(m+d)\sin\omega$$

应用 ① 得

$$V_1=\frac{m}{6}(S_{PQRS}+4M_1)=\frac{m^2ab}{6d^2}(2n+d)\sin\omega$$

$$V_2=\frac{n}{6}(S_{PQRS}+4M_2)=\frac{n^2ab}{6d^2}(2m+d)\sin\omega$$

所以

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m^2(2n+d)}{n^2(2m+d)} \qquad ③$$

由 ② 知 $$\frac{n}{d}=\frac{1}{k+1}, \frac{m}{d}=\frac{k}{k+1}$$

代入 ③ 得

$$\frac{V_1}{V_2}=k^2\cdot\frac{2+k+1}{2k+k+1}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

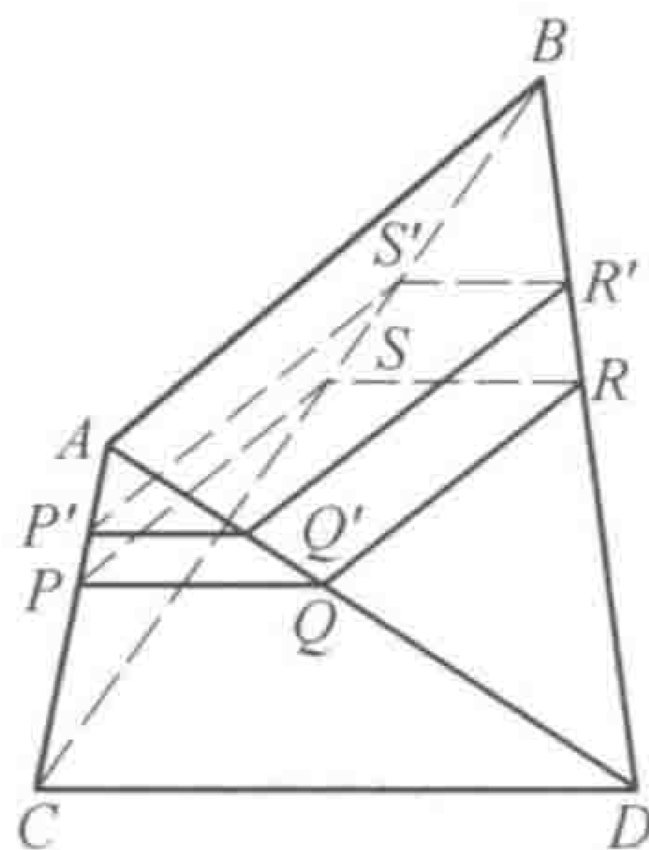


图 7.1

解法 2 利用仿射变换把 $ABCD$ 映成另一个四面体. 经这样变换后，比值 k 不变，被平面 π 分成的两部分的体积的比也不变.

设 $ABCD \to A'B'C'D'$，如图 7.2 所示，并设所映成的四面体 $A'B'C'D'$ 顶点的坐标为

$$A'(1,0,0), B'(0,1,0), C'(0,0,1), D'(0,0,0)$$

因 $C'D'$ 垂直于 $A'B'$ 所在的平面 $z=0$ 上，故四面体被平面 π 所截成的四边形 $PQRS$ 是矩形.

$D'Q$ 和 QA' 的长度分别以 t 和 $1-t$ 表示，则 $k=t/(1-t)$. 故 $t=k/(1+k)$.

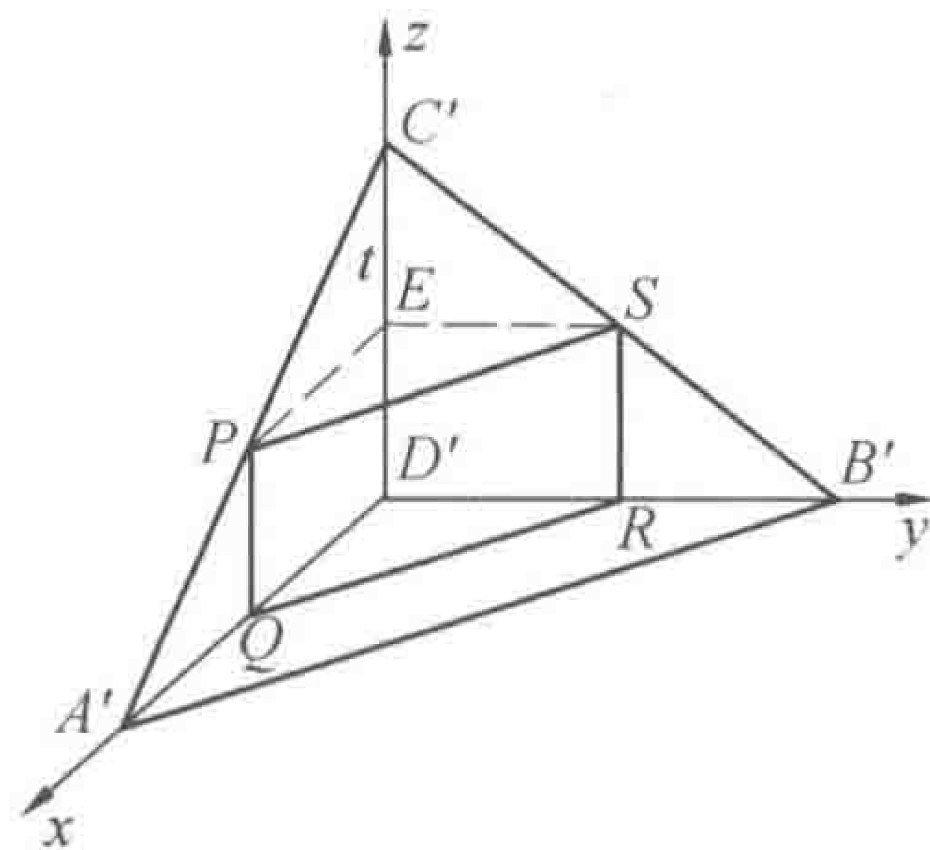


图 7.2

$A'B'C'D'$ 被平面 π 及平行于平面 $z=0$ 而通过 PQ 的平面分成如下三部分：直棱柱 $PESRQD'$，四面体 $C'PES$ 和拟柱 $A'B'SPQR$（底面为 $A'B'RQ$，另一底为线段 PS）.

直棱柱 $PESRQD'$ 的体积等于

$$S_{\triangle D'QR}\cdot PQ=\frac{1}{2}t^2(1-t)$$

四面体 $C'PES$ 的体积等于

$$\frac{1}{2}S_{\triangle PES}\cdot C'E=\frac{1}{6}t^3$$

拟柱 $A'B'SPQR$ 的体积等于

$$\frac{1}{3}S_{\triangle A'B'D'}\cdot C'D'-\frac{1}{2}t^2(1-t)-\frac{t^3}{6}=\frac{1}{6}-\frac{t^2(3-2t)}{6}=\frac{(1-t)^2(1+2t)}{6}$$

以 V_1 表示直棱柱 $PESRQD'$ 及四面体 $C'PES$ 的体积和，以 V_2 表示拟柱 $A'B'SPQR$ 的体积，则

$$V_1:V_2=\frac{t^2(3-2t)}{6}:\frac{(1-t)^2(1+2t)}{6}=k^2(k+3):(3k+1)$$

注　V_1 与 V_2 之比仅依赖于 k，而与 a,b,d,ω 无关.

解法3　如图7.3所示，AB,CD 平行于平面 $EFGH$. 过 EH 作平面 EHK // 平面 BCD.

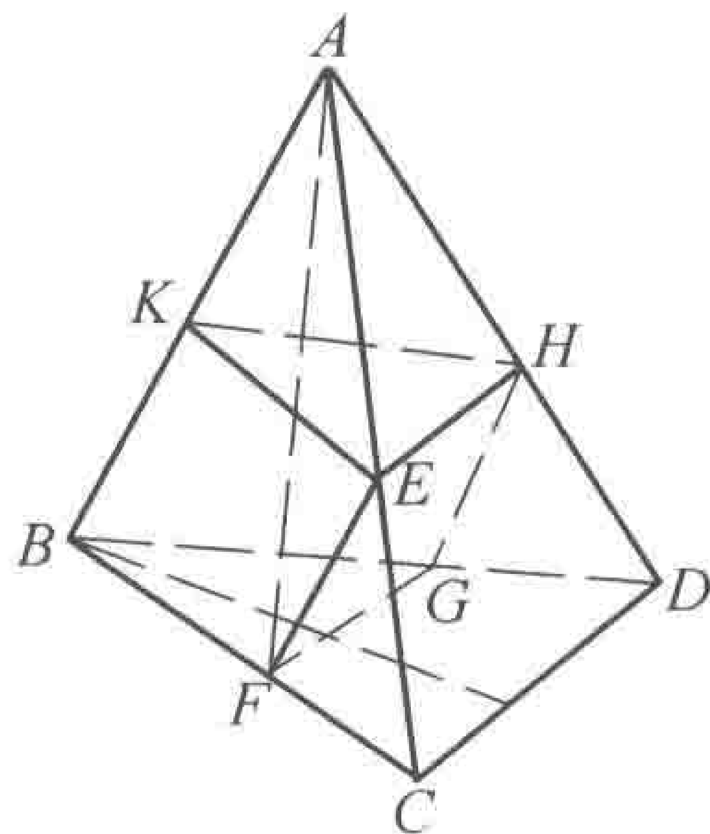


图7.3

设三棱维 $A-BCD$ 和 $A-KEH$ 的体积分别为 V 和 V_1. 由 A 向底所作的高分别为 h 和 h_1. 在 $\triangle BCD$ 中，设 CD 边上的高为 L，$\triangle BFG$ 中 FG 边上的高为 L_1.

根据题设及平行面截线段成比例可知

$$h_1=\frac{kh}{1+k},L_1=\frac{kL}{1+k},FG=\frac{bk}{1+k}$$

其中，$k=\frac{AE}{EC}$. 则

$$V=\frac{h}{3}\cdot\frac{L}{2}b=\frac{hLb}{6}$$

$$V_1=\frac{h_1}{3}\cdot\frac{L_1}{2}\cdot\frac{bk}{1+k}=\frac{hLbk^3}{6(1+k)^3}=\frac{k^3}{(1+k)^3}V$$

又直棱柱 BH 的体积

$$V_2=\frac{bLk^2}{2(1+k)^2}\cdot\frac{h}{1+k}=\frac{3k^2}{(1+k)^3}V$$

所以拟柱 FA 的体积

$$V_3=V_1+V_2=\frac{k^2(k+3)}{(1+k)^3}V$$

拟柱 ED 的体积

$$V_4=V-V_3=\frac{1+3k}{(1+k)^3}V$$

因而
$$\frac{V_3}{V_4}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

解法 4　设平面 γ 和直线 AB 之间的距离为 y. 平面 γ 和四面体 $ABCD$ 的截口是平行四边形 $MLNR$，如图 7.4 所示. 这是由于 $ML /\!/ AB$，$RN /\!/ AB$，所以有 $ML /\!/ RN$，并且 $NL /\!/ CD$，$MR /\!/ CD$，故有 $NL /\!/ MR$.

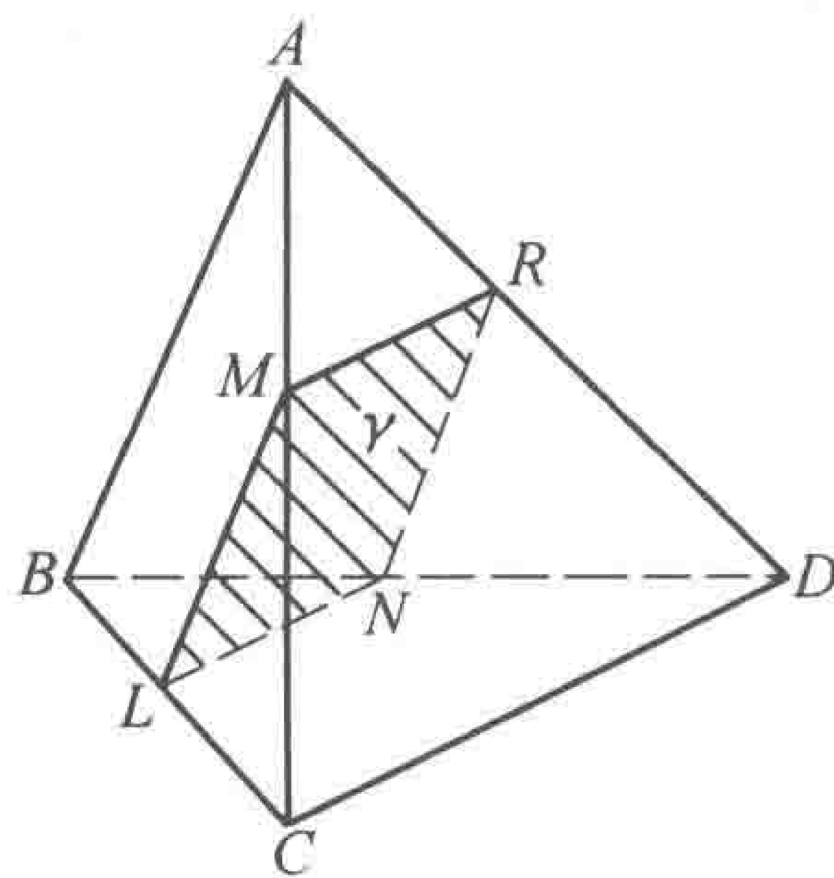


图 7.4

由平行线截得比例线段定理得

$$ML:a=y:d\Rightarrow ML=\frac{ay}{d}$$

$$MR:b=(d-y):d\Rightarrow MR=\frac{b(d-y)}{d}$$

因为平行四边形 $MLNR$ 的两边 ML 和 MR 之间的夹角为 δ，所以这个平行四边形的面积为

$$s(y)=ML\cdot MR\cdot\sin\delta=\frac{ay}{d}\cdot\frac{b(d-y)}{d}\sin\delta$$

相应的，对于和直线 AB 的距离为 x 的平行于 γ 的平面所确定的平行四边形的面积为

$$s(x)=\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin\delta$$

因此，利用横断面的面积计算体积的公式，得到平面 γ 所截的一部分多面体 $MLNRAB$ 的体积

$$V_1=\int_0^y s(x)\mathrm{d}x=\int_0^y\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin\delta\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^y\left(\frac{ab}{d}x-\frac{ab}{d^2}x^2\right)\sin\delta\mathrm{d}x=\left(\frac{aby^2}{2d}-\frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\delta=$$
$$\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta \qquad ④$$

若在 ④ 中令 $y=d$，我们就得到

$$V_{ABCD}=\frac{abd}{6}\sin\delta \qquad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 就得到平面 γ 截四面体 $ABCD$ 所得另一部分多面体 $MLNRCD$ 的体积

$$V_2=V_{ABCD}-V_1=\frac{abd}{6}\sin\delta-\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta=$$
$$\frac{ab}{6}\left[d-\frac{y^2}{d^2}(3d-2y)\right]\sin\delta$$

由已知条件$\frac{y}{d-y}=k$,即$d=y\frac{k+1}{k}$,于是得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{aby^2}{6d^2}(3d-2y)\sin\delta}{\frac{ab}{6}\left[d-\frac{y^2}{d^2}(3d-2y)\right]\sin\delta}=$$
$$\frac{y^2(3d-2y)}{d^3-y^2(3d-2y)}=\frac{k^3+3k^2}{3k+1}=\frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

4 求出所有四元实数组(x_1,x_2,x_3,x_4),使其中任一数与其他三数的积的和皆等于2.

苏联命题

解法1 本题相当于求下面方程组的所有实数解,即

$$\begin{cases}x_1+x_2x_3x_4=2 & ①\\ x_2+x_3x_4x_1=2 & ②\\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③\\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④\end{cases}$$

若$x_1=0$,则由①得$x_2x_3x_4=2$,由②,③,④得$x_2=x_3=x_4=2$,这两个结果互相矛盾,故$x_1\neq0$,同理$x_2\neq0,x_3\neq0,x_4\neq0$.

令$x_1x_2x_3x_4=p$,则方程组中每一个方程皆可写成

$$x_i+\frac{p}{x_i}=2$$

或
$$x_i^2-2x_i+p=0$$

解之得
$$x_i=1\pm\sqrt{1-p}$$

由于x_i是实数,故$p\leqslant1$.

(1)若$p=1$,则$x_i=1,i=1,2,3,4$.

(2)若$p<1$,则有如下三种可能.

i 三个根为$1+\sqrt{1-p}$,一个根为$1-\sqrt{1-p}$.这时

$$p=(1+\sqrt{1-p})^3(1-\sqrt{1-p})=(1+\sqrt{1-p})^2p\Leftrightarrow$$
$$1=(1+\sqrt{1-p})^2\Leftrightarrow1+\sqrt{1-p}=\pm1$$

式子左边不能取负值,故$1+\sqrt{1-p}=1$,即$p=1$.但这和$p<1$的假设矛盾.

ii 三个根为$1-\sqrt{1-p}$,一个根为$1+\sqrt{1-p}$.这时

$$p=(1-\sqrt{1-p})^3(1+\sqrt{1-p})=(1-\sqrt{1-p})^2p\Leftrightarrow$$
$$1=(1-\sqrt{1-p})^2\Leftrightarrow1-\sqrt{1-p}=\pm1$$

因$p<1$,式子左边应取负值,故$1-\sqrt{1-p}=-1$.解之得$p=-3$.故有一个x_i为3,其他三数为-1.

ⅲ 两个根为 $1+\sqrt{1-p}$，两个根为 $1-\sqrt{1-p}$. 这时

$$p=(1+\sqrt{1-p})^2(1-\sqrt{1-p})^2=p^2$$

故 $p=1$. 这又和 $p<1$ 的假设矛盾.

综合以上各种情形，得

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1),(3,-1,-1,-1),(-1,3,-1,-1),(-1,-1,3,-1),(-1,-1,-1,3)$$

解法 2 首先，我们证明 $x_i\neq 0(i=1,2,3,4)$；否则，例如设 $x_1=0$ 时，则由 ②，③，④ 得 $x_2=x_3=x_4=2$，不满足 ①. 故 $x_i\neq 0$.

其次，由 ① 得 $x_3x_4=\frac{2-x_1}{x_2}$，由 ② 得 $x_3x_4=\frac{2-x_2}{x_1}$，从而得

$$\frac{2-x_1}{x_2}=\frac{2-x_2}{x_1}$$

$$2x_1-x_1^2=2x_2-x_2^2$$

$$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

即
$$|x_1-1|=|x_2-1|$$

将未知数 x_1,x_2,x_3,x_4 进行轮换，可得

$$|x_1-1|=|x_2-1|=|x_3-1|=|x_4-1| \quad ⑤$$

就 x_i 的取值可分下列五种情况.

ⅰ 四个 $x_i\geqslant 1(i=1,2,3,4)$.

由 ⑤ 可知，$x_1=x_2=x_3=x_4$，由 ①，得

$$x_1+x_1^3=2,x_1^3+x_1-2=0$$

即
$$(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0$$

由于 $x_1^2+x_1+2=0$ 的判别式 $\Delta=1^2-8=-7<0$，故 $x_1^2+x_1+2=0$ 无实数解.

只有 $x_1=1$，所以 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

ⅱ 只有三个 $x_i\geqslant 1(i=2,3,4)$.

则 $x_1<1$，由 ⑤ 可得

$$-x_1+1=x_2-1=x_3-1=x_4-1$$

所以
$$x_2=x_3=x_4,x_1=2-x_2$$

由 ① 得
$$2-x_2+x_2^3=2,x_2(x_2^2-1)=0$$

因为 $x_2\geqslant 1$，所以

$$x_2=1,x_1=2-x_2=1$$

这与 $x_1<1$ 矛盾，即这时方程组无解.

ⅲ 只有两个 $x_i\geqslant 1(i=3,4)$.

则 $x_1<1,x_2<1$. 由 ⑤ 得

$$-x_1+1=-x_2+1=x_3-1=x_4-1$$

所以
$$x_1=x_2,x_3=x_4=2-x_1.$$

由 ③ 得 $$2-x_1+x_1^2(2-x_1)=2$$

即 $$x_1(x_1-1)^2=0$$

因为 $x_1\neq 0$，所以 $x_1=1$，这与 $x_1<1$ 矛盾. 即这时方程组无解.

ⅳ 只有一个 $x_i\geqslant 1$（例如 $x_4\geqslant 1$），其余 $x_i<1(i=1,2,3)$.

由 ⑤ 得

$$-x_1+1=-x_2+1=-x_3+1=x_4-1$$

所以 $$x_1=x_2=x_3,x_4=2-x_1$$

由 ④ 得 $$2-x_1+x_1^3=2$$

即 $$x_1(x_1^2-1)=0$$

由于 $x_1<1$，且 $x_1\neq 0$，所以 $x_1=-1$，从而得

$$x_1=x_2=x_3=-1,x_4=2-x_1=3$$

满足方程组.

轮换 x_1,x_2,x_3,x_4，得

$(3,-1,-1,-1),(-1,3,-1,-1),(-1,-1,3,-1)$

也是原方程组的解.

ⅴ 四个 $x_i<1(i=1,2,3,4)$.

由 ⑤ 得

$$x_1=x_2=x_3=x_4$$

类似于情形 ⅰ，可得 $x_1=1$，这与 $x_1<1$ 矛盾. 这时方程组无解.

综上所述，所求实数为

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1$$
$$x_1=x_2=x_3=-1,x_4=3$$
$$x_2=x_3=x_4=-1,x_1=3$$
$$x_3=x_4=x_1=-1,x_2=3$$
$$x_4=x_1=x_2=-1,x_3=3$$

解法4 根据题意 ① − ② 得

$$(x_1-x_2)(x_3x_4-1)=0$$

于是原方程组与下列两个方程组 Ⅰ 和 Ⅱ 同解，即

$$\text{Ⅰ}\quad\begin{cases}x_1-x_2=0 & ⑥\\ x_1+x_2x_3x_4=2 & ①\\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③\\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④\end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}\quad\begin{cases}x_3x_4-1=0 & ⑦\\ x_1+x_2x_3x_4=2 & ①\\ x_3+x_4x_1x_2=2 & ③\\ x_4+x_1x_2x_3=2 & ④\end{cases}$$

由⑥,方程组 Ⅰ 变为

$$\begin{cases}x_1+x_1x_3x_4=2 & ⑧\\ x_3+x_1^2x_4=2 & ⑨\\ x_4+x_1^2x_3=2 & ⑩\end{cases}$$

⑨－⑩得 $(x_3-x_4)(x_1^2-1)=0$

于是方程组 Ⅰ 又与下列方程组 Ⅰ′ 和 Ⅱ″ 同解,即

$$\text{Ⅰ}'\begin{cases}x_3-x_4=0\\ x_1+x_1x_3x_4=2\\ x_3+x_1^2x_4=2\end{cases}\qquad \text{Ⅰ}''\begin{cases}x_1^2-1=0\\ x_1+x_1x_3x_4=2\\ x_3+x_1^2x_4=2\end{cases}$$

解方程组 Ⅰ′,得到原方程组的一组解为(1,1,1,1).

解方程组 Ⅰ″,当 $x_1=1$ 时,所得的一组解与上面得到的解相同;当 $x_1=-1$ 时,则方程组 Ⅰ″ 变为

$$\begin{cases}x_3x_4=-3\\ x_3+x_4=2\end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解

$$(-1,-1,-1,3),(-1,-1,3,-1)$$

由⑦,方程组 Ⅱ 变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2 & ⑪\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2 & ⑫\\ \dfrac{1}{x_3}+x_1x_2x_3=2 & ⑬\end{cases}$$

⑫－⑬得 $(x_3-\dfrac{1}{x_3})(x_1x_2-1)=0$

于是方程组 Ⅱ 又与下列方程组 Ⅱ′ 和 Ⅱ″ 同解,即

$$\text{Ⅱ}'\begin{cases}x_3^2=1\\ x_1+x_2=2\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2\end{cases}\qquad \text{Ⅱ}''\begin{cases}x_1x_2=1\\ x_1+x_2=2\\ x_3+x_1x_2\cdot\dfrac{1}{x_3}=2\end{cases}$$

解方程组 Ⅱ′,当 $x_3=1$ 时,方程组 Ⅱ′ 变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=1\end{cases}$$

由此得到原方程组的一组解仍为(1,1,1,1);

当 $x_3=-1$ 时,则方程组 Ⅱ′ 变为

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=-3\end{cases}$$

由此得到原方程组的另外两组解为

$$(-1,3,-1,-1),(3,-1,-1,-1)$$

解方程组 Ⅱ″,当 $x_1x_2=1$ 时,方程组 Ⅱ″变为

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_1}=2 \\ x_3+\dfrac{1}{x_3}=2 \end{cases}$$

由此得到原方程的一组解仍为(1,1,1,1).

显然,若四元实数组(x_1,x_2,x_3,x_4)满足原方程组,则对于所有的$i=1,2,3,4$,都有$x_i\neq 0$.

综合上述讨论,原方程组共有五组不同的实数解,即

$$(1,1,1,1),(-1,-1,-1,3),(-1,-1,3,-1)$$
$$(-1,3,-1,-1),(3,-1,-1,-1)$$

5 在$\triangle OAB$中,$\angle AOB$为锐角.自$\triangle OAB$中任意一点M(异于点O)作OA,OB的垂线MP,MQ.H是$\triangle OPQ$的垂心.试求:当点M(1)在AB上;(2)在$\triangle OAB$内部移动时,点H的轨迹.

罗马尼亚命题

解法1 (1)设$\triangle OAB$是给定的三角形,如图7.5所示,M是边AB上的点,P,Q分别是自点M到OA和OB的垂线的垂足,C与D分别是自A到OB和自B到OA的垂线的垂足,而K是自P到OB的垂线的垂足.S是KP和CD的交点,T是QS和OA的交点.现在需要证明QT垂直于OA,因而S是$\triangle OPQ$的垂心.

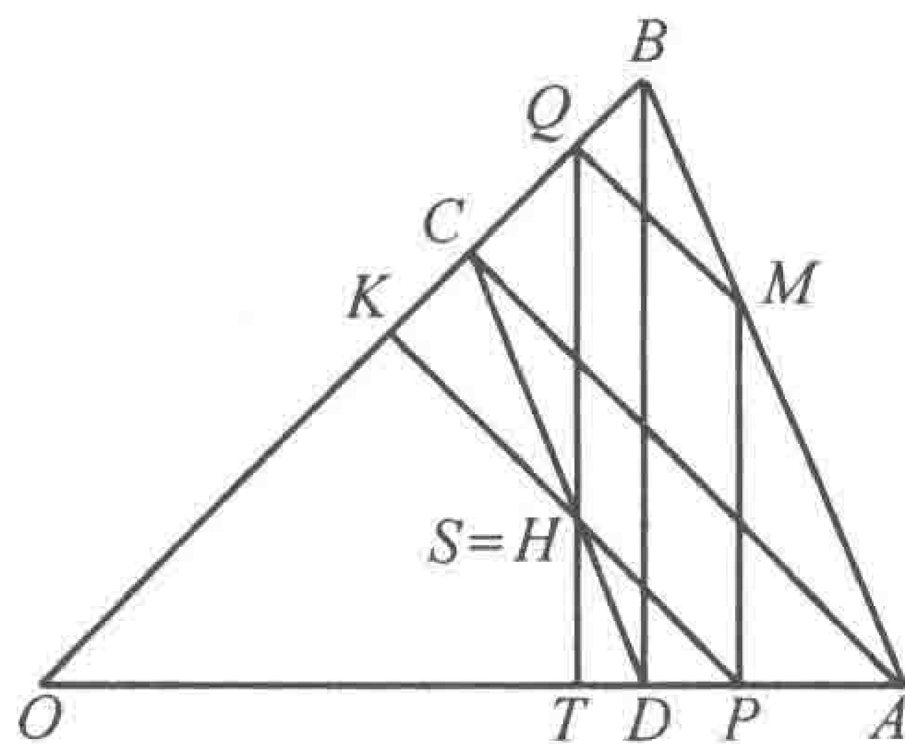


图7.5

因为KP交$\triangle OCD$的边或其延长线于点K,S和P,由梅氏定理得

$$DS\cdot CK\cdot OP=SC\cdot KO\cdot PD$$

由此得
$$\frac{DS}{SC}=\frac{KO\cdot PD}{CK\cdot OP}$$

又依据射线定理有

$$\frac{KO}{CK}=\frac{OP}{PA}$$

故
$$\frac{DS}{SC}=\frac{OP}{PA}\cdot\frac{PD}{OP}=\frac{PD}{PA}$$

另由射线定理有

$$\frac{PD}{PA}=\frac{BM}{MA}=\frac{BQ}{CQ}$$

故
$$\frac{DS}{SC}=\frac{BQ}{QC}$$

今由射线定理的可逆性,得$QT\parallel BD$,所以$QT\perp OA$.这样,$\triangle OPQ$的三条高的交点便在CD上.又根据上述作法可知,线段AB上的每一点M恰好对应线段CD上的一点H;另一方面,对应于线段CD上的每一点,恰是线段AB上的一点,即构成了线段

AB 上的点集与线段 CD 上的点集之间的一个一一对应. 所以，在这一情形下，所求的轨迹是线段 CD.

(2) 如图 7.6 所示，设 A' 是线段 OA 的内点，B' 是线段 OB 的内点，$A'B'$ 与 AB 平行，C' 与 D' 分别是自 A' 到 OB 与自 B' 到 OA 的垂线的垂足. 从图 7.6 可知，与第一种情形一样，线段 $A'B'$ 的每个内点恰好对应线段 $C'D'$ 的一个内点；反过来，对应于线段 $C'D'$ 的每个内点恰是一个 $A'B'$ 的内点. 即线段 $A'B'$ 的内点集合与线段 $C'D'$ 的内点集合构成一一对应.

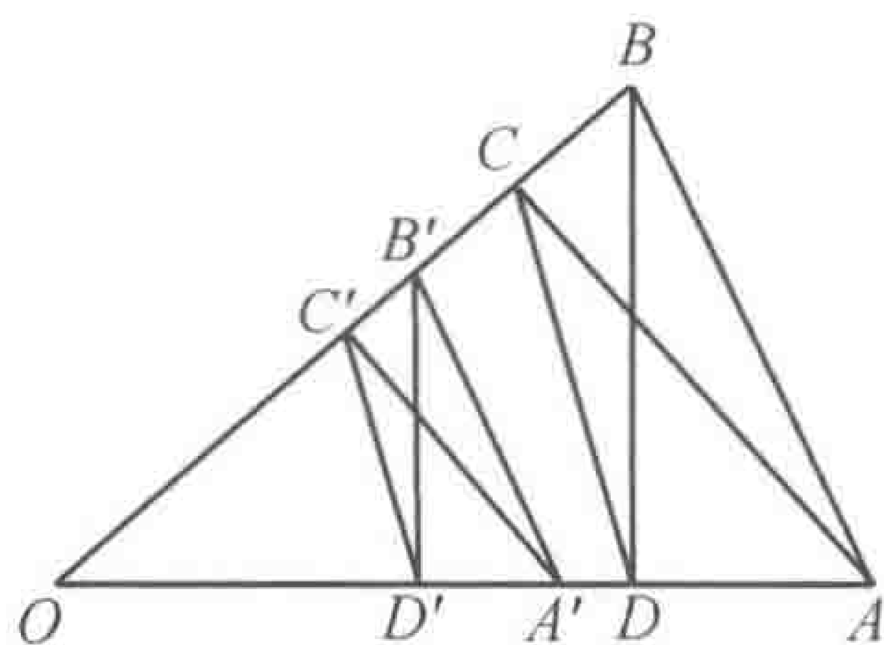


图 7.6

现在，我们考虑平行于 AB 的一族线段 $A'B'$，这里 A' 与 B' 分别是线段 OA 与 OB 的内点，使得这一族线段与平行于 CD 的一族线段 $C'D'$ 还是构成一一对应，这里 C' 与 D' 分别是线段 OC 与 OD 的内点. 即 $\triangle OAB$ 的内点集合与 $\triangle OCD$ 的内点集合构成一一对应(由作法可知，两条不同的线段 $C'D'$ 与 $C''D''$ 所对应的也是两条不同的线段 $A'B'$ 与 $A''B''$)，所以，在这一情形下，所求的点 H 的轨迹是 $\triangle ODC$ 的内部.

解法 2 (1) 以 O 为原点，作向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OH}$，$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，并分别以 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 表示之.

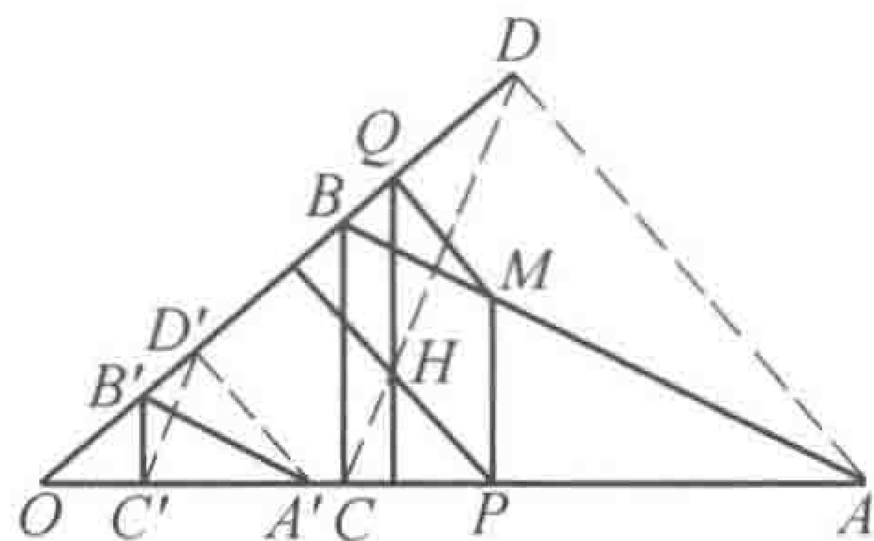


图 7.7

因 $MP \perp OA$，$QH \perp OA$，故 $MP \parallel QH$. 同理 $MQ \parallel PH$，所以四边形 $MPHQ$ 是平行四边形，从而得

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{M} \qquad ①$$

用 t 表示 $AM : AB$ 的比值，则

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + t(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B} \qquad ②$$

如图 7.7 所示，C 是自 B 至 OA 的垂线的垂足，D 是自 A 至 OB 的垂线的垂足. 若

$$(1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1$$

则 P_1 是 OA 上的点，由 ② 得

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}_1 = t(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$$

故 $P_1M \parallel CB$，即 $P_1M \perp OA$. 可知 P_1 即是点 P. 所以

$$\boldsymbol{P} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{C} \qquad ③$$

同理

$$\boldsymbol{Q} = t\boldsymbol{B} + (1-t)\boldsymbol{D} \qquad ④$$

把 ②，③，④ 代入 ①，得

$$\boldsymbol{H} = (1-t)\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{C} + t\boldsymbol{B} + (1-t)\boldsymbol{D} - (1-t)\boldsymbol{A} - t\boldsymbol{B} = t\boldsymbol{C} + (1-t)\boldsymbol{D}$$

当 $t: 0 \to 1$ 时，M 自 A 移动至 B，而 H 则自 D 移动至 C. 故点 H 的轨迹是 DC.

(2) $\triangle OAB$ 可看成是由无穷多的平行于 AB 的线段所组成. 设 $A'B'$ 是这样的一个线段，以 C'，D' 分别表示自 B' 至 OA 及自

A' 至 OB 的垂线的垂足. 当 M 自 A' 移动至 B' 时, H 自 D' 移动至 C'. 故当 M 在 $\triangle OAB$ 内移动时, 点 H 的轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部.

解法 3 不妨先就 $\triangle OAB$ 是锐角三角形的情形予以讨论.

(1) 如图 7.8 所示, 设 $AH_1 \perp OB$, $BH_2 \perp OA$, 垂足分别为 H_1, H_2, 则线段 H_1H_2 就是所求的轨迹. 证明如下.

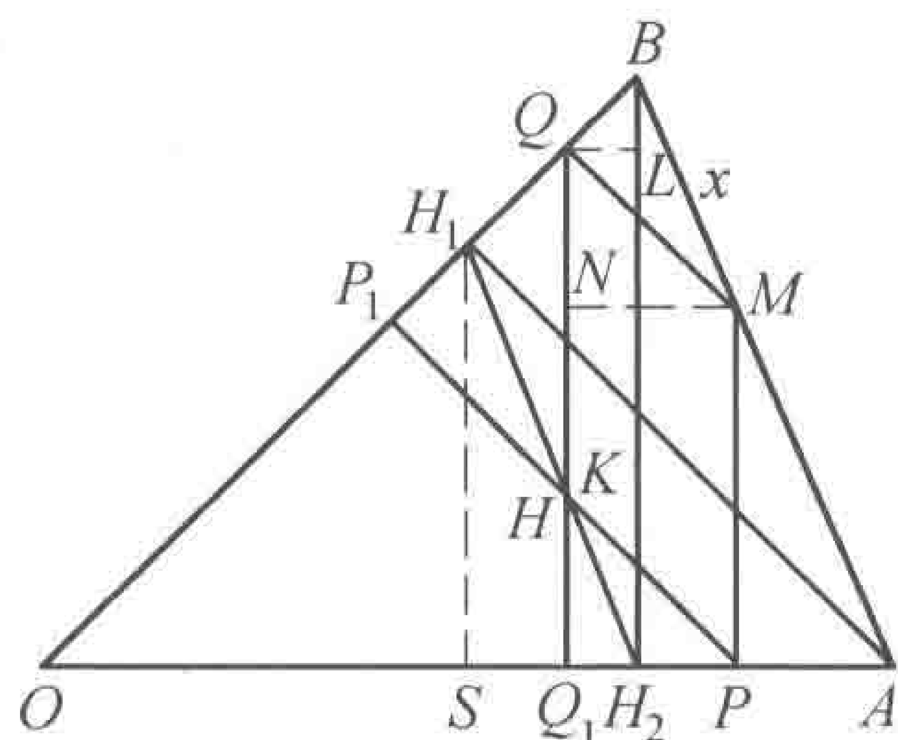


图 7.8

设 M 是 AB 上的任一点, $MP \perp OA$, $MQ \perp OB$, $QQ_1 \perp OA$, $PP_1 \perp OB$, 垂足分别为 P, Q, Q_1, P_1, 则 P_1P 与 Q_1Q 的交点 H 就是 $\triangle OPQ$ 的垂心. 并设 QQ_1 与 H_1H_2 相交于点 K. 要证明点 H 在 H_1H_2 上, 只要证明点 H 与点 K 重合就可以了.

由题设 $\angle AOB = \alpha$, 并令 $\angle OBA = \beta(\alpha, \beta < 90°)$. 因为

$$\angle BH_2A = \angle AH_1B = 90°$$

所以 H_2, A, B, H_1 四点共圆, 所以

$$\angle H_1H_2O = \angle OBA = \beta$$

设 $BM = x$, 则 $BQ = x \cdot \cos\beta$, $QM = x \cdot \sin\beta$.

作 $QL \,/\!/\, OA$, 交 BH_2 于点 L, 则四边形 QQ_1H_2L 是矩形, $\angle LQB = \angle AOB = \alpha$.

因为点 K 是 QQ_1 与 H_1H_2 的交点, 所以在 $\triangle KQ_1H_2$ 中, 有

$$Q_1H_2 = QL = BQ \cdot \cos\alpha = x \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

$$Q_1K = Q_1H_2 \cdot \tan\angle H_1H_2O = x \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \cdot \tan\beta = x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad ⑤$$

作 $MN \,/\!/\, AO$, 交 Q_1Q 于点 N, 则四边形 MNQ_1P 是矩形, 且 $\angle NQM = \angle AOB = \alpha$.

因为点 H 是 P_1P 与 Q_1Q 的交点, 所以在 $\triangle HQ_1P$ 中, 有

$$Q_1P = NM = QM \cdot \sin\alpha = x \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

又因 $\angle Q_1HP = \angle AOB = \alpha$, 得

$$Q_1H = Q_1P \cdot \cot\angle Q_1HP = x \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cot\alpha = x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad ⑥$$

由 ⑤, ⑥ 两式, 得

$$Q_1H = Q_1K$$

且 Q_1H 与 Q_1K 均在线段 Q_1Q 上, 所以点 H 与 K 重合, 因此符合条件的点 H 在线段 H_1H_2 上.

当动点 M 在 BA 上从 B 连续运动到 A 时, $x = BM$ 的值从 0 连续增大到 BA(长度), 从而

$$Q_1H = Q_1K = x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

从 0 连续增大到

$$BA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = AH_1 \cdot \cos\alpha = H_1S$$

其中, $H_1S \perp OA$, 垂足为 S. 于是, 对于线段 H_1H_2 上的任一点

H'，作 $H'Q'_1 \perp OA$，垂足为 Q'_1，有 $0 < Q'_1H' < H_1S$，有对应的 $x' = \dfrac{Q'_1H'}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$，使

$$Q'_1H' = x' \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

由于

$$0 < x' < \frac{H_1S}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = BA$$

所以在线段 BA 上存在一点 M'，使 $AM' = x'$. H' 就是对应于点 M' 的符合条件的垂心. 这就是说，线段 H_1H_2 上的任一点符合条件.

(2) 当动点 M 在 $\triangle OAB$ 的内部运动时. 我们先考察动点 M 在 $\triangle OAB$ 内与 AB 平行的某一条线段 $A'B'$ 上运动时，对应的垂心 H 的轨迹. 如图 7.9 所示，作 $A'H'_1 \perp OB$，$B'H'_2 \perp OA$，垂足分别为 H'_1，H'_2. 对 $\triangle OA'B'$ 利用(1) 的结论，可知这时点 H 的轨迹为线段 $H'_1H'_2$.

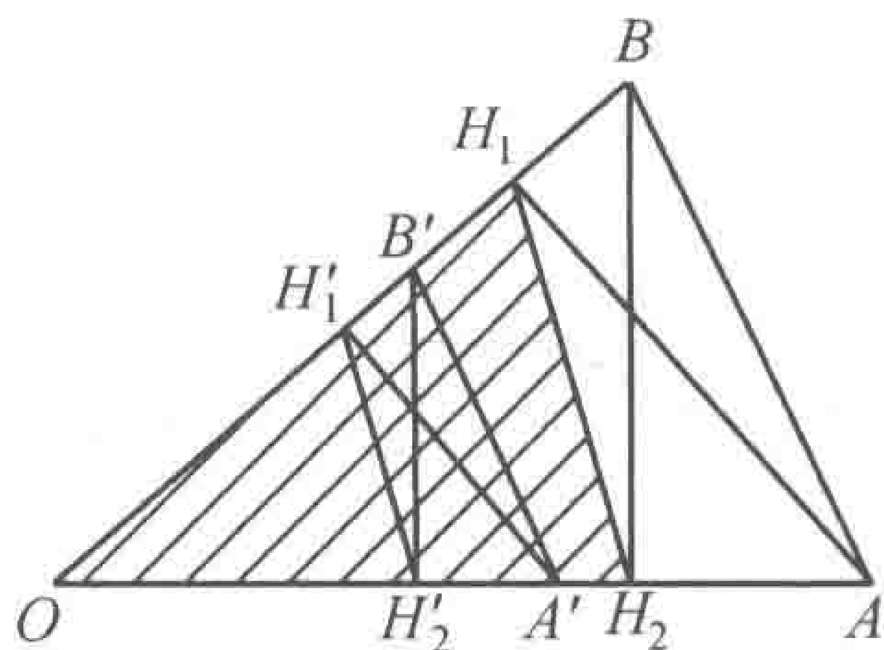


图 7.9

显然，由 $A'B' \parallel AB$，$A'H'_1 \parallel AH_1$，$BH'_2 \parallel BH_2$ 可知，四边形 $H'_1H'_2A'B'$ 与四边形 H_1H_2AB 位似，所以 $H'_1H'_2 \parallel H_1H_2$，且

$$\frac{OH'_2}{OH_2} = \frac{OA'}{OA}$$

设 $OA' = y$，则有 $OH'_2 = \dfrac{OH_2 \cdot y}{OA}$.

当点 A' 在 OA 上从点 O 连续移动到点 A 时，对应的一系列平行线段 $A'B'$(平行于 AB)就连续充满整个 $\triangle OAB$. 这时，y 从 0 连续增大到 OA，从而 $OH'_2 = \dfrac{OH_2 \cdot y}{OA}$ 的值从 0 连续增大到 OH_2，即对应的点 H'_2 从点 O 连续移动到点 H_2，这一系列的平行线段 $H'_1H'_2$(平行于 H_1H_2) 便连续地移遍整个 $\triangle OH_1H_2$. 并且由于当点 M 在线段 AB 上运动时，对应的点 H 的轨迹是线段 H_1H_2；当点 M 在线段 OA 上运动时，点 H 的轨迹是线段 OH_1；当点 M 在线段 OB 上运动时，点 H 的轨迹是线段 OH_2，所以当点 M 在 $\triangle OAB$ 的内部运动时，所求点 H 的轨迹是 $\triangle OH_1H_2$ 的内部区域(不包括 $\triangle OH_1H_2$ 的边界).

如果 $\triangle OAB$ 是钝角三角形或直角三角形，也有同样的结论，并可类似地作出证明.

解法 4 如图 7.10 所示，建立直角坐标系，设 $\triangle AOB$ 是锐角三角形(当 $\angle OAB$ 或 $\angle ABO$ 为直角或钝角时，证明完全类似)，$|OA| = a$，$|OB| = b$，作 $AC \perp OB$，$BD \perp OA$，联结 CD，那么 A，B，C，D 各点的坐标分别为

$$A(a \cdot \cos\alpha, a \cdot \sin\alpha), B(b, 0)$$
$$C(a \cdot \cos\alpha, 0), D(b \cdot \cos^2\alpha, b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)$$

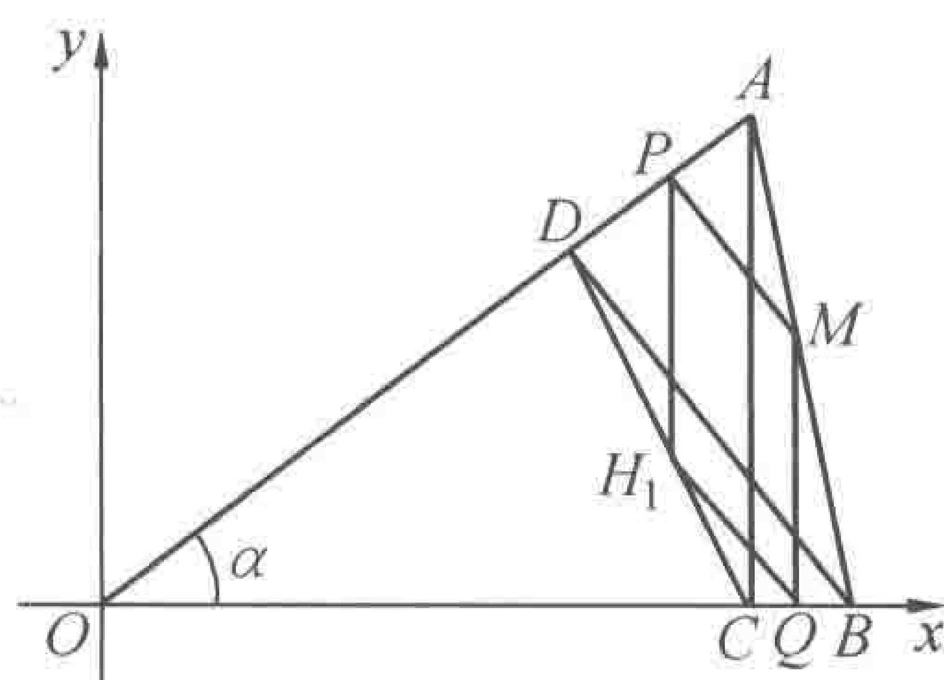


图 7.10

直线 OA 的方程为

$$y=x\cdot\tan\alpha \tag{7}$$

直线 AB 的方程为

$$y=\frac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b} \tag{8}$$

直线 CD 的方程为

$$y=\frac{b\cdot\sin\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a} \tag{9}$$

ⅰ 当点 M 在 AB 上运动时，H 的轨迹为 CD.

事实上，设点 M 的坐标为 (x_0,y_0)，则点 Q 的坐标为 $(x_0,0)$. 直线 MP 的方程为

$$y-y_0=-(x-x_0)\cot\alpha \tag{10}$$

解 ⑦ 和 ⑩ 联立的方程组，并利用点 M 在 AB 上的条件，即

$$y_0=\frac{a\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}$$

得点 P 的横坐标为

$$\frac{a\cdot\cos\alpha-b\cdot\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}$$

所以，直线 PH 的方程为

$$x=\frac{a\cdot\cos\alpha-b\cdot\cos^2\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b}x_0-\frac{ab\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\alpha-b} \tag{11}$$

直线 QH 的方程为

$$y=-(x-x_0)\cot\alpha \tag{12}$$

解 ⑪ 和 ⑫ 联立的方程组，得

$$y=\frac{b\cdot\sin\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}x-\frac{ab\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{b\cdot\cos\alpha-a}$$

而这正是 CD 的方程，由此可知点 H 在线段 CD 上.

反之，在 CD 上任取一点 $H_1(x_1,y_1)$，如图 7.10 所示，得到点 M，类似上面的方法亦可证得点 M 在线段 AB 上.

ⅱ 首先来证明，当点 M 在 $\angle AOB$ 内运动时，点 H 也在 $\angle AOB$ 内运动.

事实上，由于点 M 在 $\angle AOB$ 内，其坐标 (x_0,y_0) 必满足

$$0\leqslant y_0\leqslant x_0\cdot\tan\alpha \tag{13}$$

容易求得点 P 的横坐标为 $y_0\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+x_0\cdot\cos^2\alpha$，所以 PH 的方程为

$$x=y_0\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+x_0\cdot\cos^2\alpha \tag{14}$$

解 ⑫ 和 ⑭ 联立的方程组，并利用条件 ⑬，得

$$0\leqslant y\leqslant x\cdot\tan\alpha$$

由此可知点 H 也在 $\angle AOB$ 内运动.

下面再来证明，当点 M 在 $\angle ABO$ 内运动时，点 H 在 $\angle DCO$

内运动.

事实上,点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标满足

$$0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{a \cdot \sin\alpha}{a \cdot \cos\alpha - b}x_0 - \frac{ab \cdot \sin\alpha}{a \cdot \cos\alpha - b} \quad ⑮$$

解 ⑫ 和 ⑭ 联立的方程组,并利用条件 ⑮,得

$$y < \frac{b \cdot \sin\alpha}{b \cdot \cos\alpha - a}x - \frac{ab \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{b \cdot \cos\alpha - a} \quad ⑯$$

因为 H 是 $\triangle OPQ$ 的垂心,所以它的纵坐标总满足

$$y \geqslant 0 \quad ⑰$$

由 ⑯,⑰ 知点 H 在 $\angle DCO$ 内.

反之,在 $\angle DCO$ 内任取一点 H,类似地可以证明它所对应的点 M 在 $\angle ABO$ 内.

由于 $\angle AOB$ 和 $\angle ABO$ 的公共部分是 $\triangle OAB$,$\angle AOB$ 和 $\angle DCO$ 的公共部分是 $\triangle OCD$. 于是我们就证明了当点 M 在 $\triangle OAB$ 内部运动时,点 H 的几何轨迹是 $\triangle OCD$ 的内部.

6 在平面上给出 $n(n \geqslant 3)$ 个点,其中任意两点的距离不超过 d. 我们把距离为 d 的两点间的线段皆叫作这一点集的直径. 证明:这一点集的直径的数目至多为 n.

波兰命题

证法1 首先,我们证明对于这 n 个点中的某一点 A,若由 A 出发的直径多于两条,则必有另外一点 B,使得由点 B 出发的直径只有一条.

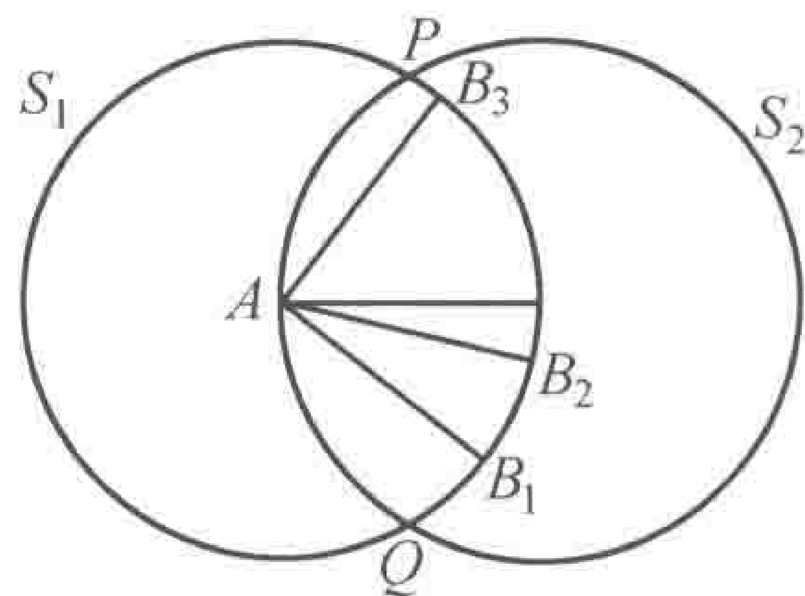


图 7.11

设由点 A 出发的直径有三条(或多于三条). 如图 7.11 所示,以 A 为圆心,d 为半径作圆 S_1,则这三条直径的另一端点 B_1, B_2, B_3 皆在圆周 S_1 上,而且 $\overset{\frown}{B_iB_j}$ 在圆 S_1 中所对的圆心角小于等于 $\pi/3$(因 $B_iB_j \leqslant d$).

设 B_2 是弧上介于 B_1, B_3 之间的点,以 B_2 为圆心,d 为半径作圆 S_2 交 S_1 于 P, Q. 在 S_2 的优弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 上,除 P, Q 两点外,所有点和 B_2 的距离皆大于 d. 在 $\overset{\frown}{PA}$ 上(点 A 除外),所有点和 B_1 的距离皆大于 d. 在 $\overset{\frown}{QA}$ 上(点 A 除外),所有点和 B_3 的距离皆大于 d. 所以 B_2A 是由点 B_2 出发的唯一直径.

现在可以用归纳法证明原命题.

当 $n=3$ 时,命题显然成立. 因为过三点的线段不会多于三条,故直径也不会多于三条.

假设当 $n=3,4,\cdots,k$ 时,命题成立.

现若给出一个 $k+1$ 个点组成的点组,记它为 T.

如果 T 中从任一点出发的直径不多于两条,由于每一条直径

有两个端点，故直径的数目不多于

$$\frac{2(k+1)}{2}=k+1$$

所以命题成立.

如果 T 中由某一点 A 出发的直径多于两条，则根据前面结论，在 T 中存在着另一点 B，使得由点 B 出发的直径只有一条. 自 T 中除去点 B 剩下一个 k 点组，依假设，这 k 点组至多有 k 条直径，再把点 B 加回去，因为由点 B 出发的直径是唯一的，所以 T 中至多有 $k+1$ 条直径，即当 $n=k+1$ 时，命题也以成立.

所以命题普遍成立.

证法 2　分别以 n 个已知点为圆心，以 d 为半径作 n 个圆，这 n 个圆(指圆盘，即圆周及其内部) 的交集(公共部分) 记作 Φ.

图形 Φ 有下列明显的性质.

(1) 任一已知点都不可能在图形 Φ 的外部.

因为如果某一已知点在 Φ 的外部，它必定在某一圆外，那么它与此圆圆心的距离就大于 d，与已知 d 是“每两点之间的距离的最大值”矛盾. 由此可见，这 n 个已知点或者在图形 Φ 的内部，或者在图形 Φ 的边界上.

(2) 图形 Φ 的内部没有一条所作圆的弧.

因为如果有某一条弧属于 Φ，那么它(这条弧或与其他弧一起) 就将图形 Φ 分成两部分，其中一部分就在这条弧所在圆的外部，这与图形 Φ 的意义矛盾.

由于在图形 Φ 内部的点必定在所作出的 n 个圆内部，它与各已知点(圆心) 的距离必定小于 d，所以 Φ 内部的任一已知点都不可能是这个点集的直径的端点. 也就是说，直径的两端点必定在图形 Φ 的边界上. 我们研究直径的条数问题，只要研究 Φ 边界上的那些点就可以了. 不妨设 n 个已知点中有 k 个点在 Φ 的边界上，$k\leqslant n$.

由于两个圆至多只有两个交点，所以作出的 n 个圆的交点不多于 $2C_n^2=n(n-1)$ 个，因此图形 Φ 的边界是由有限条弧组成的.

为叙述方便起见，我们把边界上若干条弧的交点叫做图形 Φ 的顶点. 在图形 Φ 的边界上的 k 个已知点中，设有 l 个点不是图形 Φ 的顶点($l\leqslant k$)，而有 $k-l$ 个点是图形的顶点.

又如果边界上的某一已知点不是顶点，那么以这一点为端点的直径至多只有一条. 因为如若不然，即至少有两条以它为端点的直径，从而也就至少要有两条弧通过这一点，这与该点不是顶点矛盾.

由于边界上的已知点有 l 个不是顶点，所以至少有一个端点

不是顶点的直径至多只有 l 条.

我们再来证明:两个端点都是顶点的直径不多于 $k-l$ 条. 为此,我们先证明:通过某一顶点,且另一端点亦为顶点的直径不多于两条. 证明如下.

一方面,所有这种直径的另一端点都在同一个圆周上,因为它们与这某一指定的顶点的距离都等于 d;

另一方面,在图形 Φ 的边界上,每一个圆的弧至多只有一段. 事实上,如果有同一圆的两段弧在 Φ 的边界上,那么它们之间就有另一圆的弧,联结这弧的两个端点得一条弦. 如果两个圆的圆心在此弦的同侧,因为两圆的半径相等,所以两圆的圆心必定重合;如果两圆的圆心在此弦的异侧,这时图形 Φ 就在其中一圆的外部,即有一些已知点与此圆圆心的距离大于 d,显然这是不可能的.

由于图形 Φ 边界上每一圆的弧不多于一段,所以如果同一条弧上有三个已知点,那么其中至多只有两个是顶点. 再由上述第一方面的结论,可知通过某一顶点如果它属于已知点集且另一端点也是顶点的直径不多于 2 条. 由于边界上只有 $k-l$ 个已知点是图形的顶点,所以两个端点都是顶点的直径的条数不多于 $2(k-l)\cdot\frac{1}{2}=k-l$(因为每一条直径按其两个端点重复计算了两次).

综上所述,这 n 个已知点的点集的直径至多只有 $l+(k-l)=k$ 条,而 $k\leqslant n$,所以直径不多于 n 条. 命题得证.

应该指出,对于任一 $n\geqslant 3$,确实存在这样的 n 个点. 具有 n 条直径. 我们只要作一个边长为 d 的等边 $\triangle ABC$,再以某一顶点 A 为圆心,d 为半径作圆,在 $\overset{\frown}{BC}$ 上任意取 $n-3$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-3}$,所得的 n 个点 A,B,C 及 $A_i(i=1,2,\cdots,n-3)$ 的点集就有 n 条直径 AB,BC,CA 及 $AA_i(i=1,2,\cdots,n-3)$. 这就说明,题目所作的估计数 n 是精确的,不可能再加强了.

第 7 届国际数学奥林匹克英文原题

The seventh International Mathematical Olympiad was held from June 30th to July 13th in the cities of Berlin and Bogensee.

1 Find all numbers $x, x \in [0, 2\pi]$, which satisfy the inequalities

$$2\cos x \leqslant |\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}| \leqslant \sqrt{2}$$

(Yugoslavia)

2 We are given the system of linear equations

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0$$

whose coefficients are real numbers which satisfy the conditions:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} are positive numbers;

b) all the remaining coefficients are negative;

c) for each equation, the sum of its coefficients is positive.

Show that the system admits only the trivial solution $x_1=x_2=x_3=0$.

(Poland)

3 Let $ABCD$ be a tetrahedron and let $AB=a, CD=b$. The distance between the lines AB and DC is d and their angle is ω. Let π be the plane parallel to AB and DC and such that the ratio between the distance from π to AB and DC is k. The plane π divides the tetrahedron into two geometric solids.

Find the ratio between the volumes of these two solids.

(Czechoslovakia)

4 Find all real numbers x_1, x_2, x_3, x_4 for which the sum between each number and the product of the remaining numbers is 2.

(USSR)

5 Let OAB be a triangle such that $\angle AOB=\alpha, \alpha<90°$. For any point M of the plane, $M\neq O$, P and Q are the feet of the perpendiculars from M to OA and OB, respectively. The point H is the orthocenter of the triangle OPQ. Find the locus of the point H in the following cases:

a) M is a variable point on the segment AB;

b) M is a variable point inside the triangle AOB.

(Romania)

6 We are given n points in a plane, $n\geqslant 3$, and let d be the longest distance between two points from this set. Show that at most n couple of points are located at a distance d.

(Poland)

第 7 届国际数学奥林匹克各国成绩表

1965，民主德国

名次	国家或地区	分数		奖牌		参赛队
		（满分 320）	金牌	银牌	铜牌	人数
1.	苏联	281	5	2	—	8
2.	匈牙利	244	3	2	2	8
3.	罗马尼亚	222	—	4	3	8
4.	波兰	178	—	1	3	8
5.	德意志民主共和国	175	—	2	3	8
6.	捷克斯洛伐克	159	—	1	3	8
7.	南斯拉夫	137	—	—	2	8
8.	保加利亚	93	—	—	1	8
9.	蒙古	63	—	—	—	8
10.	芬兰	62	—	—	—	8

第三编
第8届国际数学奥林匹克

第 8 届国际数学奥林匹克题解

保加利亚,1966

苏联命题

1 在一次数学竞赛中共出了 A,B,C 三题. 在参加竞赛的所有学生中,至少解出一题者共 25 人. 在不能解出 A 题的学生中,至少解出一题者共 25 人. 在不能解出 A 题的学生中,能解出 B 题的人数是能解出 C 题的人数的二倍. 在能解出 A 题的学生中,只能解出这一题的人数比至少还能解出另一题的人数多一人. 如果只能解出一题的学生中有一半不能解出 A 题,问只能解出 B 题的学生有几人?

解法 1　用[A],[AB],[ABC],… 分别表示只能解出 A 题,能解出 A,B 二题,能解出 A,B,C 三题 … 的人数. 依题意

$$[A]+[B]+[C]+[AB]+[BC]+[CA]+[ABC]=25 \quad ①$$

$$[B]+[BC]=2[C]+2[BC] \quad ②$$

$$[A]=[AB]+[AC]+[ABC]+1 \quad ③$$

$$[A]+[B]+[C]=2[B]+2[C] \quad ④$$

②,④ 可写成

$$[BC]=[B]-2[C] \quad ⑤$$

$$[A]=[B]+[C] \quad ⑥$$

由 ①,③ 得

$$2[A]+[B]+[C]+[BC]=26 \quad ⑦$$

由 ⑤,⑥,⑦ 得

$$4[B]+[C]=26 \quad ⑧$$

由 ⑧ 可知　$4[B]\leqslant 26$

故

$$[B]\leqslant \frac{26}{4}<7 \quad ⑨$$

又由 ⑤ 可知　$[B]\geqslant 2[C]$

将上式代入 ⑧ 得

$$4[B]+\frac{1}{2}[B]\geqslant 26$$

故

$$[B]\geqslant \frac{52}{6}>5 \quad ⑩$$

由 ⑨,⑩ 得　　　　　　$[B]=6$

即只能解出 B 题的学生共 6 人.

解法 2　如图 8.1 所示,设 x 为只解出 A 题的人数,y 为只解出 B 题的人数,z 为只解出 C 题的人数.

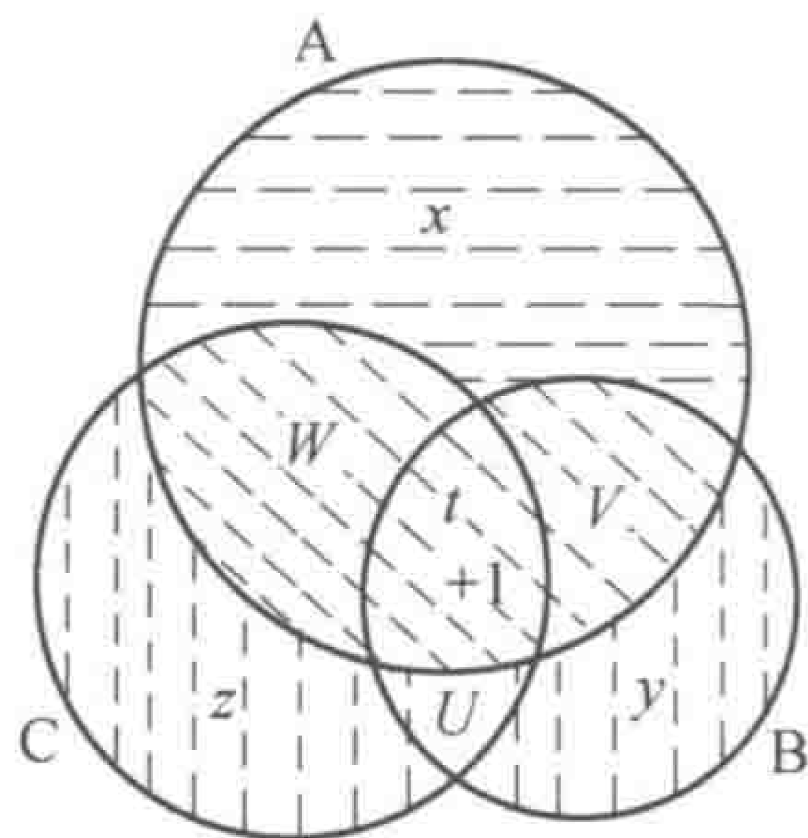


图 8.1

V 为只解出 A,B 两题的人数,W 为只解出 A,C 两题的人数. U 为只解出 B,C 两题的人数,t 为同时解出三题的人数.

依题意,在没有解出 A 题的人中,解出 B 题的人数是解出 C 题的 2 倍. 即

$$y+U=2(U+z)\Rightarrow y=2z+U$$

又

$$x=V+t+W+1$$

$$x=y+z$$

所以图中每种阴影部分都应为

$$y+z=3z+U$$

但

$$(3z+U)\times 3+U=25+1=26 \tag{11}$$

即

$$9z+4U=26$$

$$9z\leqslant 26\Rightarrow z\leqslant\frac{26}{9}<\frac{27}{9}=3$$

z 取 0,1,2 三个非负整数值.

当 $z=0$ 时,$4U=26$,不能成立;当 $z=1$ 时,$4U=26-9=17$,$U=\frac{17}{4}$,也不能成立. 所以只能是 $z=2$,此时代入 ⑪,$U=2$,$y=6$,于是 $x=8$,$V+W+t=7$. 代入原题检验符合题意要求,因此,只解出 B 题的学生共 6 人.

匈牙利命题

2 设 $\triangle ABC$ 三边的长度为 a,b,c,其所对的角分别为 α,β,γ,且满足条件

$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}(a\cdot\tan\alpha+b\cdot\tan\beta)$$

证明:该三角形是等腰三角形.

证法 1　因 α,β,γ 是三角形的三内角,故

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

代入给定的关系式,并化简得

$$(a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0$$

若 $\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0$,则

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

若 $$a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=0$$

则 $$\frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

但是根据正弦定理知

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

所以

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)=0$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta=0 \text{ 或 } \pi-(\alpha-\beta)=0$$

显然，$\pi-(\alpha-\beta)\neq 0$（因为 $\alpha<\pi+\beta$），所以 $\alpha-\beta=0$，即 $\alpha=\beta$.

证法 2　引理　若 α,β 是锐角，$OP=1$，且 $\alpha\leqslant\beta$，则

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)$$

引理的证明　如图 8.2 所示，$PQ=\tan\alpha$，$PS=\tan\beta$. 若 OR 平分 $\angle QOS$，则

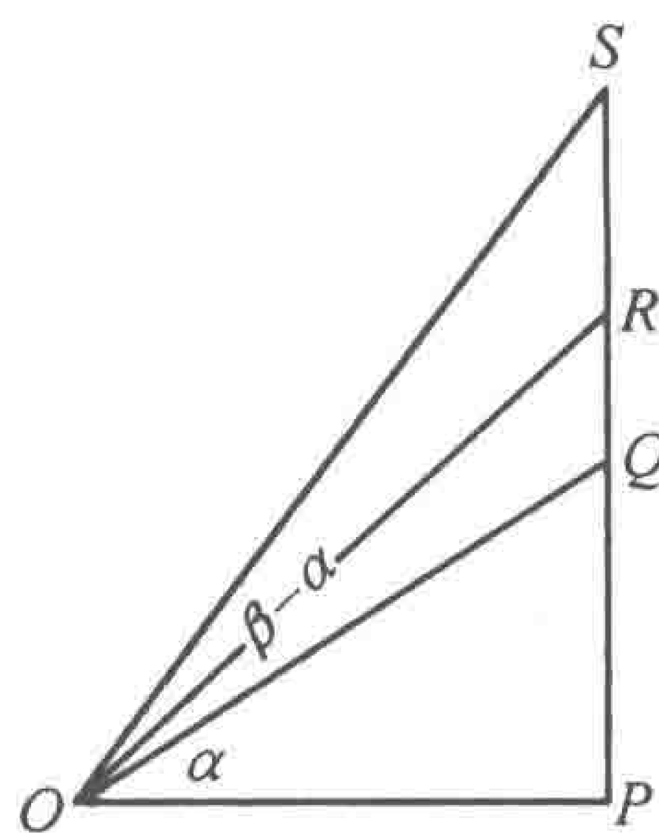


图 8.2

$$PR=\tan\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

显然 $RS\geqslant RQ$，故

$$PR-PQ\leqslant PS-PR$$

所以 $$PR\leqslant\frac{1}{2}(PQ+PS)$$

这即所要证的不等式. 这个不等式当且仅当 $\alpha=\beta$ 时等号成立.

引理证毕.

本题所给出的关系式可写成

$$(a+b)\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=a\cdot\tan\alpha+b\cdot\tan\beta \quad ①$$

不妨设 $\alpha\leqslant\beta$. 若 $\beta\geqslant 90^\circ$，则 $a<b$. 这时

$$\tan\alpha<\tan(\alpha+\gamma)=\tan(\pi-\beta)=|\tan\beta|$$

代入 ① 的右边得负值，而 ① 的左边却取正值，这是不可能的. 故 $\alpha\leqslant\beta<90^\circ$.

若 $\alpha<\beta$，根据上述引理及 ①，得

$$\frac{1}{2}(a+b)(\tan\alpha+\tan\beta)>a\cdot\tan\alpha+b\cdot\tan\beta\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(b-a)\tan\alpha>\frac{1}{2}(b-a)\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha>\tan\beta$$

因对于锐角 θ，$\tan\theta$ 是增函数，故 $\tan\alpha>\tan\beta\Rightarrow\alpha>\beta$. 这和 $\alpha<\beta$ 的假设矛盾. 所以 $\alpha=\beta$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证法 3　因 α,β,γ 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

因此

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

代入 ① 得

$$a+b=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+b\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$$

移项、去分母，得

$$a\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$b\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

或

$$a\cdot\cos\beta\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)=b\cdot\cos\alpha\cdot\sin\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

即

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}(a\cdot\cos\beta-b\cdot\sin\alpha)=0$$

由此知 $\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=0$，因而得 $\alpha=\beta$；或者

$$a\cdot\cos\beta-b\cdot\cos\alpha=0$$

即

$$a\cdot\cos\beta=b\cdot\cos\alpha$$

两边平方得

$$a^2\cdot\cos^2\beta=b^2\cdot\cos^2\alpha$$

再由正弦定理知 $a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha$. 将此式两边平方后和上式相加，就得到 $a^2=b^2$，即 $a=b$. 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

> **3** 证明：一个正四面体的外接球中心到四个顶点的距离的和小于空间中其他的任意一点到这四个顶点的距离的和.

保加利亚命题

证法 1　如图 8.3 所示，设 AB,CD 是一对相对的棱，M,N 是它们的中点. 因 CM,DM 分别是正 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 的中线，可知 $\triangle CMD$ 是等腰三角形. 同理，$\triangle ANB$ 也是等腰三角形. 故 $AB\perp MN$，$CD\perp MN$. MN 的长度 d 即是空间两线段 AB,CD 的距离.

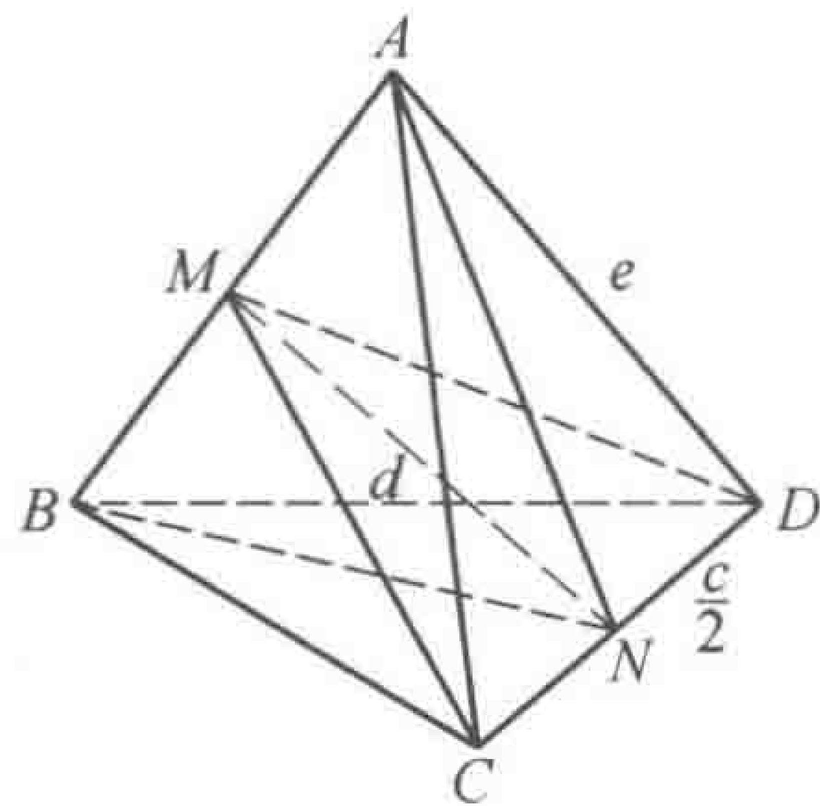


图 8.3

设 P 是空间的任一点，以 h_1,h_2 分别表示 $\triangle APB$，$\triangle CPD$ 中以 P 为顶点的高，则 $h_1+h_2\geqslant d$.

如图 8.4 所示，在同一平面上取一点 P'，作两个等腰 $\triangle A'P'B'$，$\triangle C'P'D'$，使其底边互相平行，即 $A'B'\parallel C'D'$. 这两

底边的长度等于正四面体任一棱的长度 e，且以 P' 为顶点至 $A'B'$，$C'D'$ 的高分别为 h_1，h_2. 这样所作的 $\triangle A'P'B'$ 和 $\triangle APB$ 等底等高，$\triangle C'P'D'$ 和 $\triangle CPD$ 等底等高.

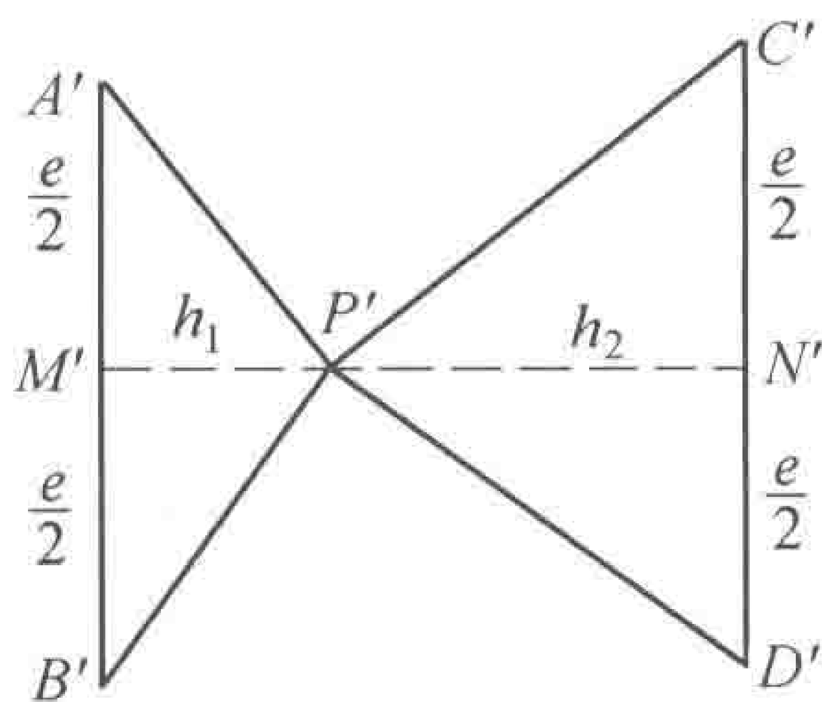


图 8.4

在等底等高的诸三角形中，等腰三角形的周长最小. 令

$$S = PA + PB + PC + PD$$

则
$$S \geqslant P'A' + P'B' + P'C' + P'D' \quad ①$$

又 $A'P' + P'D' \geqslant A'D'$，$B'P' + P'C' \geqslant B'C'$，如图 8.4 所示，故

$$S \geqslant A'D' + B'C' \quad ②$$

$A'D'$ 和 $B'C'$ 是矩形 $A'B'C'D'$ 的对角线. 这个矩形的长和宽分别为 e 及 $h_1 + h_2 \geqslant d$.

若 P 是外接球的球心，则 P 是 MN 的中点，$\triangle APB$ 和 $\triangle CPD$ 是高为 $d/2$ 的等腰三角形. 这时矩形的面积等于 ed，而对角线长度的和 $2\sqrt{e^2 + d^2}$ 恰好等于 S. 若 P 不是外接球的球心，则 P 不是 MN 的中点. 这时 ①，② 中至少有一式不能取等号，故 $S > 2\sqrt{e^2 + d^2}$. 所以当 P 是外接球的球心时，S 取最小值.

现在再给出本题的另一种证法，为此先证明两个引理.

引理 1　设 P 是正四面体 $A'B'C'D'$ 内部的任意一点，则自点 P 到各侧面的垂线长的和等于这个四面体的高 h.

引理 1 的证明　四个四面体 $A'B'C'P$，$A'B'D'P$，$A'C'D'P$ 及 $B'C'D'P$ 的体积和等于四面体 $A'B'C'D'$ 的体积. 由于 $A'B'C'D'$ 是正四面体，故四个小四面体的底面面积彼此相等，用 G 表示. 它们的高恰好是自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的这些面的垂线，其长度分别用 h_1，h_2，h_3，h_4 表示. 于是由体积公式

$$\frac{1}{3}Gh_1 + \frac{1}{3}Gh_2 + \frac{1}{3}Gh_3 + \frac{1}{3}Gh_4 = \frac{1}{3}Gh$$

推得
$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$$

引理 2　设 P 为四面体 $A'B'C'D'$ 外部一点，则自 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 各侧面的垂线长 h_1，h_2，h_3，h_4 与四面体的高 h 之间有如下关系，即

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h$$

引理 2 的证明　四面体 $A'B'C'D'$ 的底面与四面体 $A'B'C'P$，$A'B'D'P$，$A'C'D'P$ 及 $B'C'D'P$ 的底面仍然相等，但现在所取的这四个四面体的体积之和却大于四面体 $A'B'C'D'$ 的体积，所以根据四面体体积公式就可得到

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 > h$$

现在我们来证明本题的结论.

证法 2 如图 8.5 所示，设给定正四面体的顶点是 A,B,C 和 D，我们对它外接一个四面体 $A'B'C'D'$，使得 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 的彼此对应的面互相平行，且点 A,B,C,D 位于 $A'B'C'D'$ 的面上，则这两个四面体是相似的，因而 $A'B'C'D'$ 也是正四面体.

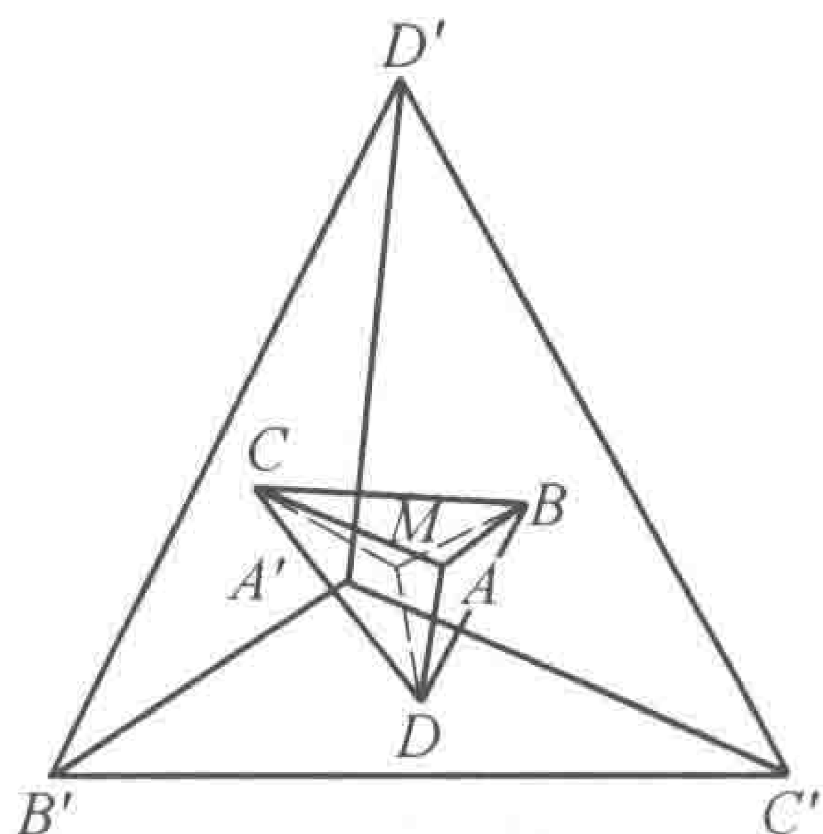


图 8.5

由于四面体 $ABCD$ 的高交于一点，记它为 M，则 M 与外接球球心重合，并且线段 MA,MB,MC 及 MD 恰好是自 M 到四面体 $A'B'C'D'$ 各面的垂线. 根据引理 1，它们的长度之和等于四面体 $A'B'C'D'$ 的高 h. 即

$$MA+MB+MC+MD=h$$

现在，我们考虑在四面体 $A'B'C'D'$ 的内部或其面上的任意一点 P（异于点 M）. 对于此点，线段 PA,PB,PC 与 PD 中至少有三条比由 P 到四面体 $A'B'C'D'$ 的对应面的垂线要长. 因此

$$PA+PB+PC+PD>MA+MB+MC+MD$$

此外，根据引理 2，对于所有位于四面体 $A'B'C'D'$ 外部的点 P，上述不等式显然也成立.

证法 3 设正四面体 $ABCD$，过它的各顶点 A,B,C,D 分别作这个正四面体外接球的切平面，得到一个新的正四面体 $A'B'C'D'$. 正四面体 $A'B'C'D'$ 与已知正四面体 $ABCD$ 相位似，位似系数为 -3. 从正四面体 $A'B'C'D'$ 内部或各面上的任一点，到各面的距离之和是一个常数，它等于 $\dfrac{V}{S/3}$（V 为正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积，S 为一个面的面积），即等于正四面体 $A'B'C'D'$ 的高. 这个常数也就是正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点 A,B,C,D 的距离之和. 根据“点到平面以垂线长为最短”的性质，它必定小于正四面体 $A'B'C'D'$ 内部其他点或面上的任一点到 A,B,C,D 各点的距离之和.

下面再证明正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到各顶点的距离之和（即正四面体 $A'B'C'D'$ 的高）小于四面体 $A'B'C'D'$ 外部任一点到 A,B,C,D 各点的距离之和. 设 M 是正四面体 $A'B'C'D'$ 外部的任一点，我们考察以点 M 为公共顶点，正四面体 $A'B'C'D'$ 的各面为底面的四个四面体分别为 $MA'B'C'$，$MA'B'D'$，$MA'C'D'$，$MB'C'D'$. 这四个四面体的全体必定包含四面体 $A'B'C'D'$，即四面体 $A'B'C'D'$ 内的任一点至少属于这四个四面体之一，并且存在着属于这四个四面体之一而不属于四面体 $A'B'C'D'$ 的点. 事实上，设 N 是正四面体 $A'B'C'D'$ 内部的任一点，过 M,N 两点作直线 MN，它至少与正四面体 $A'B'C'D'$ 的两个面相交，设交点分别为 P,Q，且 $MQ>MN>MP$，于是点 N 在线段 MQ 上，它必定在以 M 为顶点，点 Q 所在的面为底面的四面

体内;并且在线段 MP 上的任一点,也在这个四面体内,但在正四面体 $A'B'C'D'$ 外. 由此可见,这四个四面体的体积之和 V' 要大于正四面体 $A'B'C'D'$ 的体积 V,所以

$$\frac{V'}{S/3} > \frac{V}{S/3}$$

(S 表示正四面体 $A'B'C'D'$ 一个面的面积). 即正四面体 $ABCD$ 的外接球球心到它的各顶点的距离之和 $\left(=\frac{V}{S/3}\right)$ 必定小于点 M 到正四面体 $A'B'C'D'$ 各面的距离之和 $\left(=\frac{V'}{S/3}\right)$,它当然更小于 MA, MB, MC, MD 之和(因为点到平面以垂线长为最短).

综上所述,正四面体外接球球心到各顶点的距离之和小于其他任一点(不论是在正四面体内、外还是各面上)到各顶点的距离之和.

4 证明:对于任意一个自然数 n 和任意一个实数 $x \neq k\pi/2^t (t=0,1,\cdots,n; k$ 是任意自然数) 有

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^t x} = \cot x - \cot 2^n x$$

南斯拉夫命题

证明 因 $x \neq k\pi/2^t$,故 $\sin 2^t\pi \neq 0$.

现在用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时

$$\cot x - \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x} \quad ①$$

故原式成立.

假设当 $n=m$ 时原式成立,即

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\sin 2^t x} = \cot x - \cot 2^m x$$

两边各加 $\frac{1}{\sin 2^{m+1} x}$,得

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{1}{\sin 2^t x} + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} = \cot x - \cot 2^m x + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} \quad ②$$

在 ① 中,以 $2^m x$ 代替 x,得

$$\frac{1}{\sin 2^{m+1} x} = \cot 2^m x - \cot 2^{m+1} x$$

代入 ②,可知原式当 $n=m+1$ 时也成立.

所以,原式对于任一自然数 n 和任一实数 $x \neq k\pi/2^t$ 都能成立.

捷克斯洛伐克命题

5 解方程组

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1\end{cases}$$

其中 a_1,a_2,a_3,a_4 是已知的互不相等的实数.

解 如果把 a_i,a_j 的下标调换,原方程组不变.故不妨设 $a_1>a_2>a_3>a_4$,于是得

$$\begin{cases}(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1 & ①\\(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1 & ②\\(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 & ③\\(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1 & ④\end{cases}$$

①-②,②-③,③-④ 得

$$(a_1-a_2)(x_2+x_3+x_4-x_1)=0$$

$$(a_2-a_3)(x_3+x_4-x_1-x_2)=0$$

$$(a_3-a_4)(x_4-x_1-x_2-x_3)=0$$

因 $a_i\neq a_j(i\neq j)$,故有

$$x_2+x_3+x_4=x_1$$

$$-x_2+x_3+x_4=x_1$$

$$-x_2-x_3+x_4=x_1$$

由此得 $x_1=x_4,x_2=x_3=0$

由 ④ 得 $x_1=1/(a_1-a_4)$,故方程组的解是

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4},x_2=x_3=0$$

在一般情况下,若 $i,j,k,l=1,2,3,4,a_i>a_j>a_k>a_l$,则原方程组的解是

$$x_i=x_l=\frac{1}{a_i-a_l},x_j=x_k=0$$

推广 用同样方法可解 n 个方程

$$\sum|a_i-a_j|x_j=1,i,j=1,2,\cdots$$

的方程组.若 $a_1>a_2>\cdots>a_n$,则其解为

$$x_1=x_n=\frac{1}{a_1-a_n},x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$$

6 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上分别任取异于端点的点 K,L,M. 证明:$\triangle AML$,$\triangle BKM$,$\triangle CLK$ 中至少有一个三角形的面积小于或等于 $\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$.

波兰命题

证法 1 如图 8.6 所示,设 A',B',C' 分别是 BC,CA,AB 的中点,各中点的连线把 $\triangle ABC$ 分成四个等积的三角形. 故

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

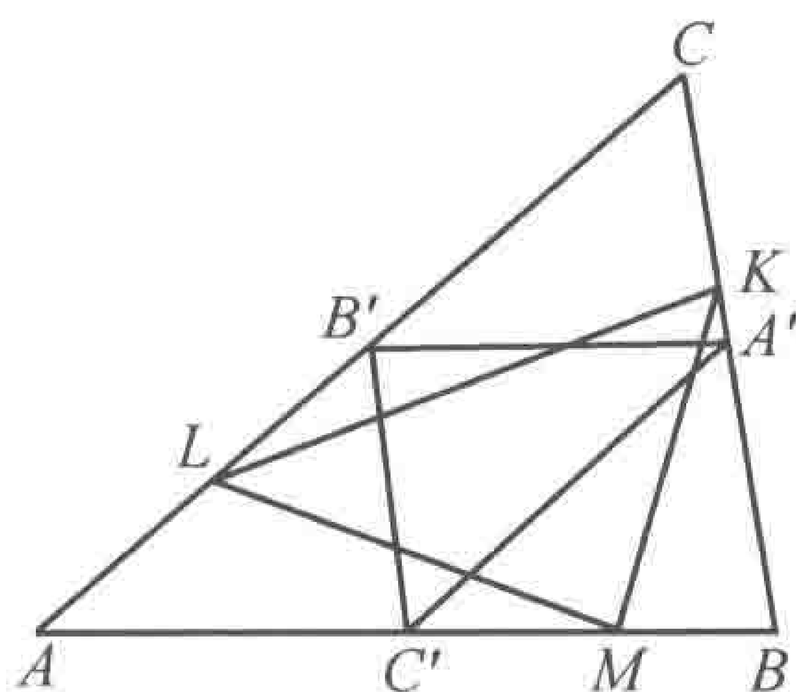


图 8.6

在三边上取异于 A,B,C 的点 K,L,M,若 $\triangle KLM$ 和 $\triangle A'B'C'$ 重合,则它的面积等于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. 否则有如下两种情形.

ⅰ $\triangle KLM$ 有一边是 $\triangle AB'C'$ 或 $\triangle BA'C'$ 或 $\triangle CA'B'$ 内的线段. 例如,KL 是 $\triangle CA'B'$ 内的线段. 在这种情形下,显然

$$S_{\triangle CLK}<S_{\triangle CA'B'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

ⅱ KL 和 $A'B'$,$B'C'$ 相交,LM 和 $B'C'$,$C'A'$ 相交,MK 和 $C'A'$,$A'B'$ 相交. 如图 8.6 所示,因 $A'B'\parallel AB$,故

$$S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'M} \quad ①$$

以 $A'M$ 为底,$\triangle A'B'M$ 的高小于 $\triangle A'LM$ 的高,故

$$S_{\triangle A'B'M}<S_{\triangle A'LM} \quad ②$$

以 ML 为底,$\triangle A'LM$ 的高小于 $\triangle KLM$ 的高,故

$$S_{\triangle A'LM}<S_{\triangle KLM} \quad ③$$

由 ①,②,③,得

$$S_{\triangle KLM}>S_{\triangle A'B'C'}$$

所以 $S_{\triangle AML}+S_{\triangle BKM}+S_{\triangle CLK}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle KLM}<$

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle A'B'C'}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$$

故 $\triangle AML$,$\triangle BKM$,$\triangle CLK$ 中至少有一个三角形,它的面积小于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证法 2 仍用证法 1 的图,并用 a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 三边的长度,用 p,q,r 表示 $C'M$,$A'K$,$B'L$ 的长度,则

$$S_{\triangle AML}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}+p\right)\left(\frac{b}{2}-r\right)\sin A$$

$$S_{\triangle BKM}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+q\right)\left(\frac{c}{2}-p\right)\sin B$$

$$S_{\triangle CKL}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-q\right)\left(\frac{b}{2}+r\right)\sin C$$

以上三式相乘得

$$S_{\triangle AML}\cdot S_{\triangle BKM}\cdot S_{\triangle CKL}=\frac{1}{8}\left(\frac{c^2}{4}-p^2\right)\left(\frac{a^2}{4}-q^2\right)\left(\frac{b^2}{4}-r^2\right)\cdot \sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \quad ④$$

又因 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$

得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{8}a^2b^2c^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \quad ⑤$$

因 $0\leqslant p<\frac{c}{2},0\leqslant q<\frac{a}{2},0\leqslant r<\frac{b}{2}$，可知 $\frac{p^2}{c^2},\frac{q^2}{a^2},\frac{r^2}{b^2}$ 皆为小于 $\frac{1}{4}$ 的正数. 故 ④ 的右边适合如下的不等式，即

$$\frac{1}{8}a^2b^2c^2\left(\frac{1}{4}-\frac{p^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{q^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{r^2}{b^2}\right)\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leqslant \frac{1}{8}a^2b^2c^2\left(\frac{1}{4}\right)^3\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C \quad ⑥$$

由 ④,⑤,⑥ 得

$$S_{\triangle AML}\cdot S_{\triangle BKM}\cdot S_{\triangle CKL}\leqslant\left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$$

若 K,L,M 是三边的中点，则 $p=q=r=0$，上式的等号成立，这时每个 $S_{\triangle AML}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，否则必有一个 $S_{\triangle AML}<\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

证法 3　应用仿射变换，把 $\triangle ABC$ 映成正 $\triangle A'B'C'$. 如图8.7所示，经变换后面积的比值不变，例如

$$S_{\triangle AML}:S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'M'L'}:S_{\triangle A'B'C'}$$

所以，如果命题经过仿射变换以后是正确的，那么原命题也是正确的.

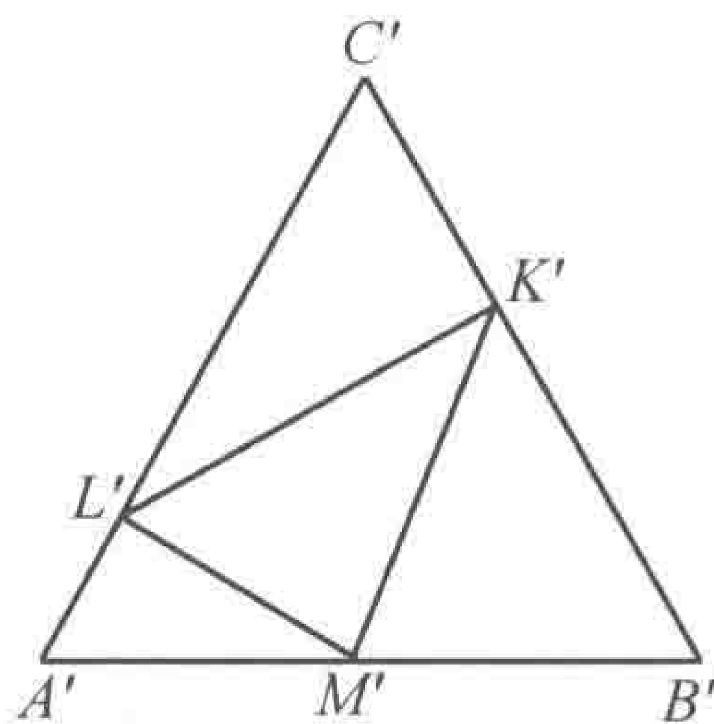


图 8.7

K',L',M' 把正三角形分成六条线段. 不妨设 $A'L'$ 是其中最短的线段. 于是

$$A'L'\leqslant B'M',A'M'\cdot A'L'\leqslant A'M'\cdot M'B'$$

由于几何中项不大于算术中项，所以

$$A'M'\cdot M'B'\leqslant\left(\frac{A'M'+M'B'}{2}\right)^2=\frac{(A'B')^2}{4}$$

因而 $$S_{\triangle A'M'L'}=\frac{1}{2}A'M'\cdot A'L'\cdot\sin 60^\circ\leqslant \frac{1}{8}(A'B')^2\sin 60^\circ=\frac{1}{4}S_{\triangle A'B'C'}$$

所以 $$S_{\triangle AML}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

第 8 届国际数学奥林匹克英文原题

The eighth International Mathematical Olympiad was held from July 3rd to July 13th 1966 in the city of Sofia.

1 In a mathematical contest there are three proposed problems, say A, B, C. Twenty-five students solved at least one problem. The number of students solving problem B but not solving problem A is twice the number of students solving problem C. The number of students solving only problem A is one more than the number of remaining solvers of the problem A. Half of the solvers of the only problem B didn't solve the problem A.

How many students solved only problem B?

(USSR)

2 The sides a, b, c and the angles α, β, γ of the triangle ABC satisfy the equality

$$a+b=\tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$$

Prove that ABC is an isosceles triangle.

(Hungary)

3 Show that the sum of distances from the centre of the circumscribed sphere of a regular tetrahedron to the tetrahedron's vertices does not exceed the sum of distances from any other point to the tetrahedron's vertices.

(Bulgaria)

4 Let k, n be integer numbers, $n>0$. Show that for any real number $x, x\neq\frac{k\pi}{2^t}, t=0,1,\cdots,n$, the following equality holds

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\sin 2^t x}=\cot x-\cot 2^n x$$

(Yugoslavia)

5 Solve the system

$$|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1$$
$$|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1$$
$$|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1$$
$$|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1$$

where a_1, a_2, a_3, a_4 are distinct real numbers.

(Czechoslovakia)

6 Let ABC be a triangle and M, K, L be interior points on the segments AB, BC, CA, respectively. Show that among the triangles MAL, KBM, LCK at least one does not exceed a quarter from the area of the triangle ABC.

(Poland)

第8届国际数学奥林匹克各国成绩表

1966,保加利亚

名次	国家或地区	分数（满分320）	奖牌 金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
1.	苏联	293	5	1	1	8
2.	匈牙利	281	3	1	2	8
3.	德意志民主共和国	280	3	3	—	8
4.	波兰	269	1	4	1	8
5.	罗马尼亚	257	1	2	2	8
6.	保加利亚	236	—	1	3	8
7.	南斯拉夫	224	—	2	1	8
8.	捷克斯洛伐克	215	—	1	2	8
9.	蒙古	90	—	—	—	8

第四编
第 9 届国际数学奥林匹克

第 9 届国际数学奥林匹克题解

南斯拉夫，1967

捷克斯洛伐克命题

1 在 $\square ABCD$ 中，已知 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，$AB=a$，$AD=1$，$\angle BAD=\alpha$. 证明：以 A,B,C,D 为圆心，半径为 1 的圆 K_A,K_B,K_C,K_D 能覆盖 $\square ABCD$ 的充要条件是

$$a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

证法 1 如图 9.1 所示，作 $\triangle ABD$ 的外接圆. 因为 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，故圆心 O 在三角形内. 易知 C 是圆外的点.

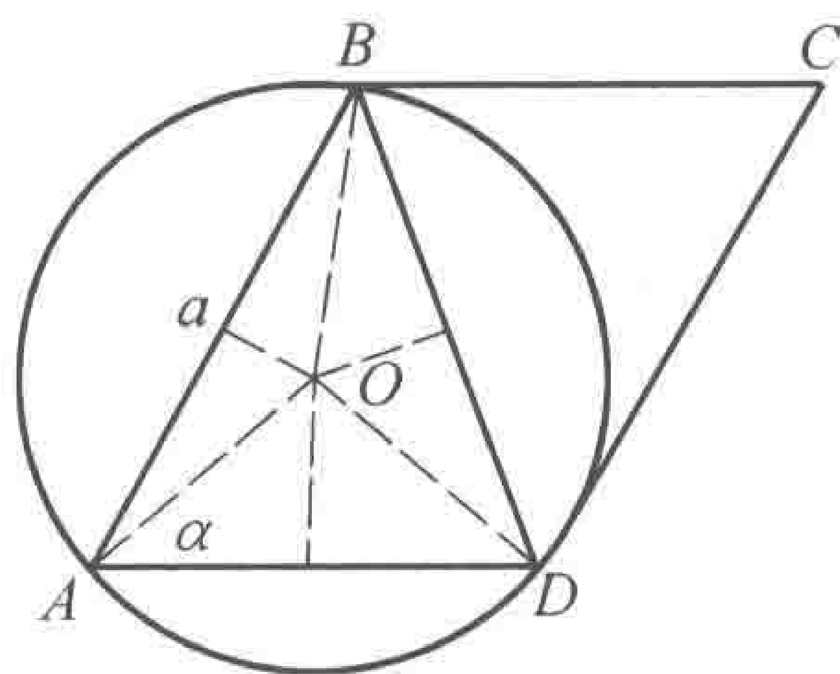


图 9.1

设外接圆的半径 $R\leqslant 1$，则联结 AO,BO,DO 的线段和过 O 而垂直于三边的线段把 $\triangle ABD$ 分成六个直角三角形. 于是，$\triangle ABD$ 中的任一点 M 必在某一个直角三角形中，它和相应顶点的距离小于等于 $R\leqslant 1$. 故 $\triangle ABD$ 能被 K_A,K_B,K_D 所覆盖. 利用对称性，$\triangle BCD$ 能被 K_B,K_C,K_D 所覆盖.

反之，若 $R>1$，则 K_A,K_B,K_C 不能盖住点 O. 又因为 $OC>R>1$，K_C 也盖不住点 O. 可知 $R\leqslant 1$ 是 K_A,K_B,K_C,K_D 能覆盖 $\square ABCD$ 的充要条件. 因此我们只要证明

$$R\leqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

事实上，根据余弦定理，在 $\triangle ABD$ 中有

$$BD=\sqrt{1+a^2-2a\cdot\cos\alpha}$$

因 $BD=2R\cdot\sin\alpha$，代入上式得

$$\sqrt{1+a^2-2a\cdot\cos\alpha}=2R\cdot\sin\alpha$$

所以

$$\begin{aligned}R\leqslant 1\Leftrightarrow 1+a^2-2a\cdot\cos\alpha\leqslant 4\sin\alpha=\\ 3\sin^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)\Leftrightarrow\\ a^2-2a\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha\leqslant 3\sin^2\alpha\Leftrightarrow \quad ①\\ (a-\cos\alpha)^2\leqslant 3\sin^2\alpha \quad ②\end{aligned}$$

由 ② 解得

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

因为

$$a=AB>AD\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

故 ① 恒成立. 所以

$$R\leqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

证法 2　作 $\triangle ABD$ 的外接圆，如图 9.2 所示，因为 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，所以外接圆圆心 O 必在 $\triangle ABD$ 内.

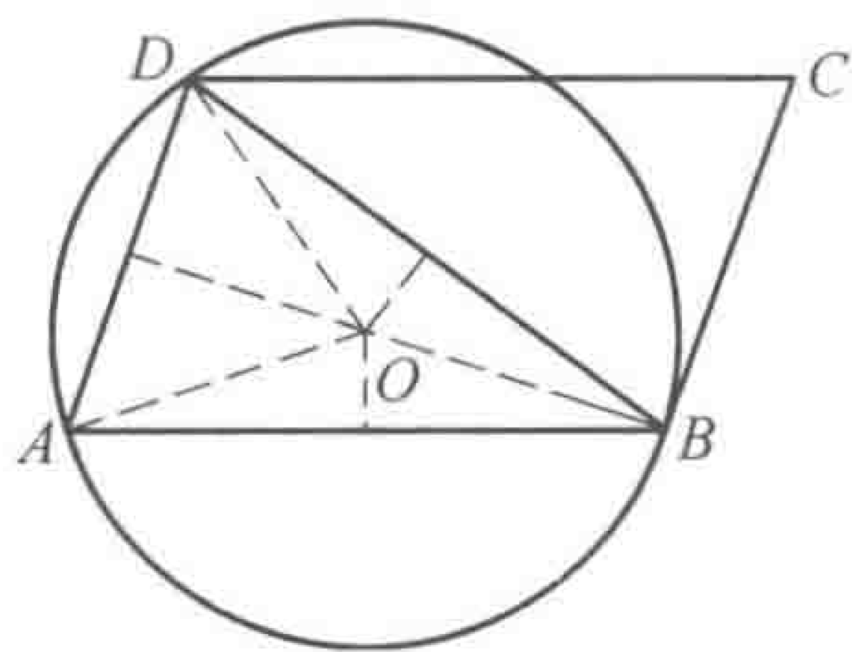


图 9.2

先证明 $\square ABCD$ 的第四个顶点 C 必在圆 O 的外部.

用反证法. 若点 C 在圆 O 上，则因 C 与 A 分布在 BD 的两侧，故

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD > 90^\circ$$

但已知 $\angle BCD = \angle BAD < 90^\circ$，所以两者矛盾；

若点 C 在圆 O 内，则

$$\angle BCD > 180^\circ - \angle BAD > 90^\circ$$

也与 $\angle BCD = \angle BAD < 90^\circ$ 矛盾. 因而点 C 不可能在圆 O 上，也不可能在圆 O 内，必定在圆 O 外.

其次，设 $\triangle ABD$ 的外接圆半径为 R，我们来证明：$\square ABCD$ 被四个圆 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖的充分必要条件为 $R \leqslant 1$.

先证必要性. 设 $\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖，要证明 $R \leqslant 1$. 用反证法，设 $R > 1$，即 $OA = OB = OD > 1$，那么圆 K_A，K_B，K_C 不可能覆盖点 O. 又因点 C 在圆 O 外，所以 $OC > R > 1$，圆 K_C 也不可能覆盖点 O. 但点 O 在 $\triangle ABD$ 内，因而在 $\square ABCD$ 内. 这就是说，$\square ABCD$ 内至少有一点 O 不能被 K_A, K_B, K_C, K_D 所覆盖，与假设矛盾. 因此 $R > 1$ 为不可能，即有 $R \leqslant 1$.

再证充分性. 设 $R \leqslant 1$，要证明 $\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖. 从点 O 向 $\triangle ABD$ 的三边作垂线，虽然，这些垂线分别将对应的各边平分. 这三条垂线与三条半径 OA, OB, OD 将 $\triangle ABD$ 分成六个直角三角形，并且每个直角三角形的斜边等于半径 R. 由于直角三角形的任一顶点到该直角三角形的任一点的距离不大于斜边，所以 $\triangle ABD$ 内任一点 M，必定与某一个顶点的距离不大于 R，于是以对应的这个顶点为圆心，以 1 为半径的圆就覆盖点 M. 因此，当 $R \leqslant 1$ 时，$\triangle ABD$ 被 K_A, K_B, K_D 覆盖. 由对称性可得，$\triangle CDB$ 被 K_C, K_D，K_B 覆盖. 所以，$\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖.

最后，我们来证明 $R \leqslant 1$ 的充分必要条件是

$$a \leqslant \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$$

在 $\triangle ABD$ 中，由 $\dfrac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R$，可得

$$R = \frac{BD}{2\sin \angle BAD}$$

又已知 $AD = 1, AB = a, \angle BAD = \alpha$，可得

$$BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cdot \cos \alpha}$$

从而得

$$R = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cdot \cos \alpha}}{2\sin \alpha}$$

因此，$R \leqslant 1$ 的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cdot\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\leqslant 1$$

解这个关于 a 的不等式,得

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

因为 $$a=AB>AD\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

所以 $$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a$$

总是成立的.

这就证明了

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

是 $R\leqslant 1$ 的充分必要条件,从而也就是 $\square ABCD$ 被圆 K_A,K_B,K_C,K_D 覆盖的充分必要条件.

证法3 圆 K_B,K_C 可以看作是从圆 K_A,K_D 的位置向右平行移动距离 a 得到.如图9.3(b)所示,在 AB 与 DC 之间且平行于它们的直线 l 交 K_A,K_D 的"外缘"于 M,N.不同的直线 l 截得不同的线段 MN,其中必有最短的,如线段 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$).显然,当且仅当平移的距离 a 不大于 M_0N_0 时,K_A,K_B,K_C,K_D 才能覆盖 $\square ABCD$.

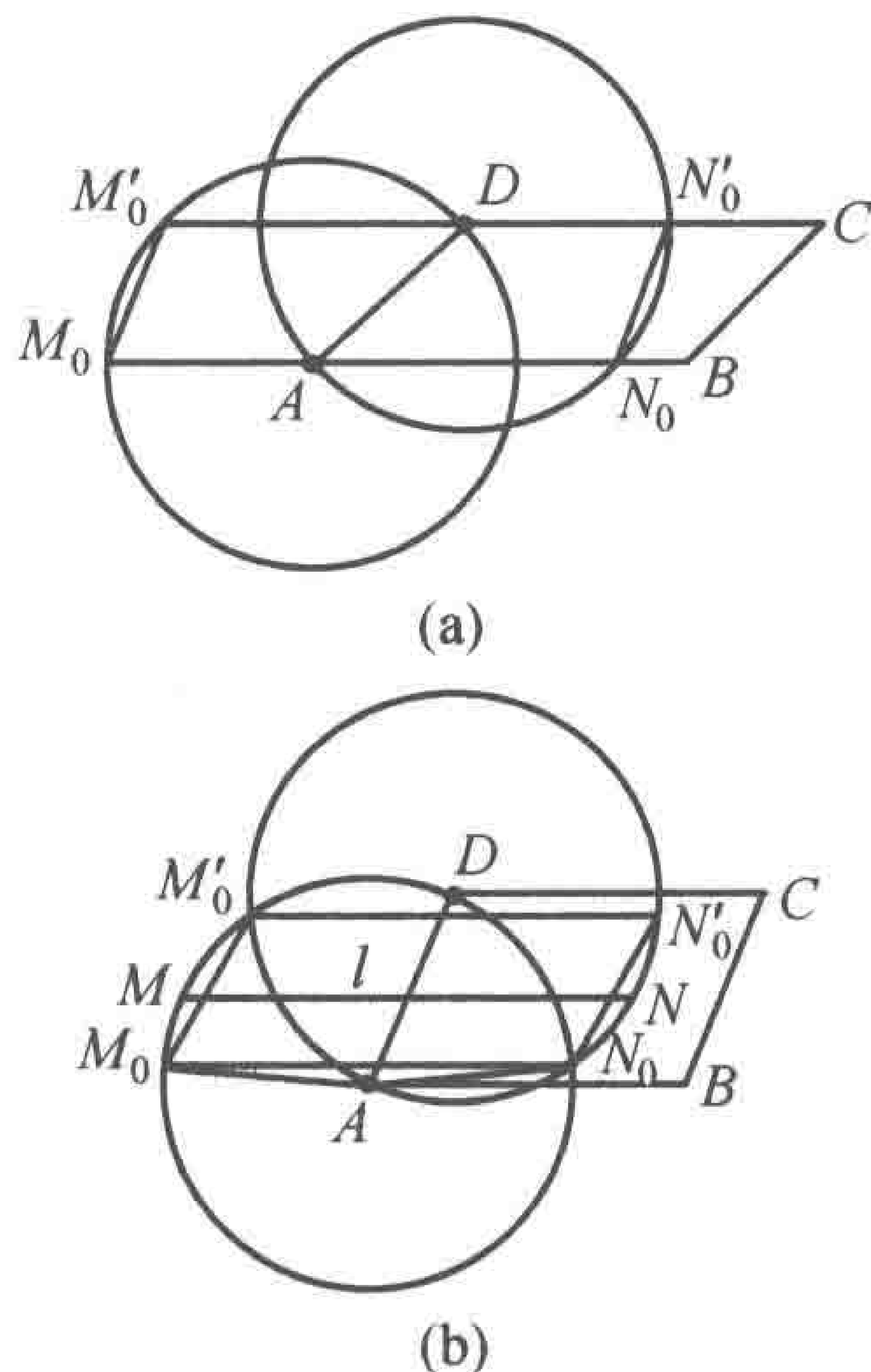


图9.3

当 $\alpha>60°$ 时,K_A,K_D 的交点在 AB 与 DC 之间.如图9.3(a)所示,$M_0N_0N'_0M'_0$ 是平行四边形,故 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$)是 MN 中的最短者.因为

$$\angle M_0N_0A=\angle N_0AB=\alpha-60°$$

故 $$M_0N_0=2\cos(\alpha-60°)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

当 $\alpha=60°$ 时,K_A,K_D 的交点在 AB 或 DC 上,同样可知 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$)是 MN 中的最短者,这时

$$M_0N_0=2=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

所以,当 $\alpha\geqslant 60°$ 时,当且仅当

$$a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

$\square ABCD$ 被圆 K_A,K_B,K_C,K_D 覆盖.

当 $\alpha<60°$ 时,圆 K_A,K_D 的交点在 AB 与 CD 之外,这时 MN 中最短者为延长 BA,CD 在 K_A,K_D 内所截得的线段 M_0N_0(或 $M'_0N'_0$),因为

$$\angle M'_0DA=\angle N_0AD=\alpha$$

故 $$M_0N_0=1+2\cos\alpha\geqslant 1+2\cos 60°=2$$

而 $$2\geqslant 2\cos(60°-\alpha)=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

所以 $$M_0N_0\geqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$$

因此,当 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 时,$a\leqslant M_0N_0$,故 $\square ABCD$ 被圆 K_A,

K_B, K_C, K_D 覆盖.

若 $\square ABCD$ 被 K_A, K_B, K_C, K_D 覆盖，根据题设 $\triangle ABD$ 是锐角三角形，所以 $\angle ADB < 90°$，因此 $\angle ABD > 30°$，从而

$$\cot \angle ABD = \frac{a - \cos \alpha}{\sin \alpha} < \sqrt{3}$$

故
$$a < \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$$

于是，问题得证.

2 若一个四面体恰有一棱之长大于 1，求这个四面体的体积 $V \leqslant \frac{1}{8}$.

波兰命题

解法 1 如图 9.4 所示. 设 AB 是这个四面体最长的棱，则 $\triangle ACD$，$\triangle BCD$ 的边长不大于 1. $\triangle BCD$ 的高 BE 和 $\triangle ACD$ 的高 AF 不大于 $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$，其中，$a(a < 1)$ 表示 CD 的长度.

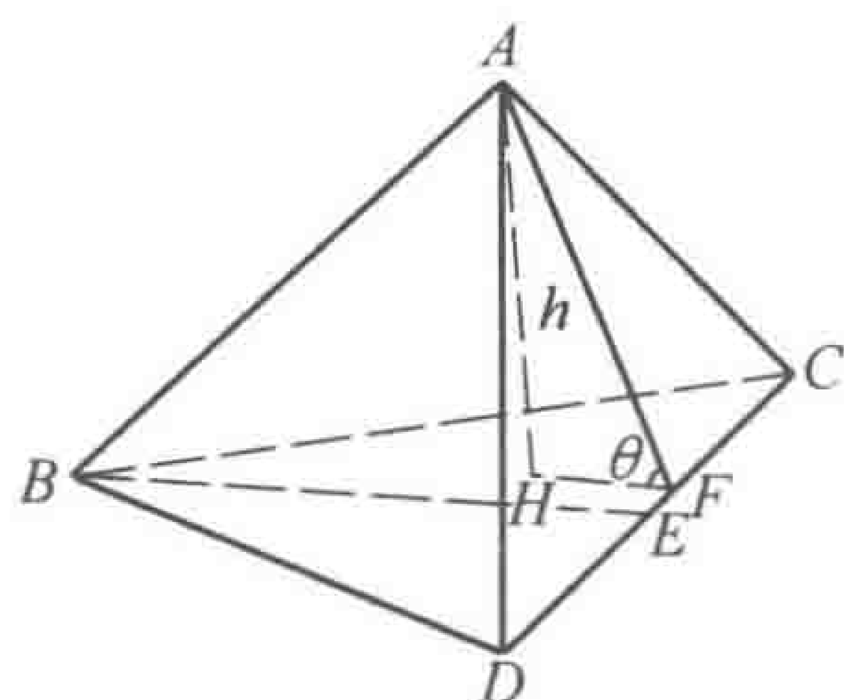


图 9.4

四面体的高

$$h \leqslant AF \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

所以
$$V = \frac{1}{3} h S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{24} a(4 - a^2)$$

当 a 在区间 $[0,1]$ 内变动时，有

$$a(4 - a^2) = 3 - (1 - a) - (2 + a)(1 - a)^2 \leqslant 3$$

当 $a = 1$ 时，$a(4 - a^2)$ 取最大值 3. 所以

$$V \leqslant \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

解法 2 如图 9.4 所示，四面体 $ABCD$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} AF \cdot \sin \theta \cdot S_{\triangle BCD}$$

ⅰ 当 $AF \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，由于在每边长不超过 1 的三角形中，以每边长为 1 的等边三角形的面积最大，所以

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BE \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$$

故
$$V = \frac{1}{3} AF \cdot \sin \theta \cdot S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$$

ⅱ 当 $AF > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，注意到 $S_{\triangle ACD} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$，而 $AF > \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$CD<1$.

又因在每边长不超过 1 的同底三角形中,以腰长为 1 的等腰三角形的面积最大,高也最大,因此只需考虑当

$$CD<1, AC=AD=BC=BD=1$$

时,该四面体的体积是否超过$\frac{1}{8}$.

设 $\angle ACD=\alpha>60^\circ$,则

$$AF=\sin\alpha, CD=2\cos\alpha$$

$$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

所以 $$V=\frac{1}{3}AF\cdot\sin\theta\cdot S_{\triangle BCD}\leqslant\frac{1}{3}\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=$$

$$\frac{1}{6}\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{12}(\cos\alpha-\cos 3\alpha)<$$

$$\frac{1}{12}(\cos 60^\circ-\cos 180^\circ)(\text{因 }180^\circ<3\alpha<270^\circ)=$$

$$\frac{1}{12}(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{8}$$

综合上述两种情形的证明即得 $V\leqslant\frac{1}{8}$.

3 设 k,m,n 是正整数,$m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数. 令 $C_s=s(s+1)$. 求证:乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

能被乘积 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

英国命题

证法 1 首先由

$$C_r-C_s=r^2+r-s^2-s=(r-s)(r+s+1)$$

可得 $$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)=$$

$$[(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)]\cdot$$

$$[(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)]=$$

$$A\cdot B$$

其中,A 表示第一个外括号内的乘积,B 表示第二个外括号内的乘积. 由组合公式可知

$$\frac{A}{n!}=\binom{m-k+n}{n}$$

是整数.

$$\frac{(m+k+1)B}{(m+1)!}=\binom{m+k+n+1}{n+1}$$

也是整数. 由于 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数,故

$$\frac{B}{(n+1)!}$$

也是整数.

所以,$A \cdot B$ 可被 $n!\ (n+1)! = C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

证法 2 (1) 当 $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$ 时,必有一正整数 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,使 $m+i=k$,则乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

中有一个因子为零,即$(C_{m+i}-C_k)=0$,此时结论显然成立.

(2) 当 $m+1>k$ 时,乘积中所有的因子都是正数. 由已知条件有

$$C_p-C_q=p(p+1)-q(q+1)=(p-q)(p+q+1)$$

下面我们分别给予证明.

一方面,因为$(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)$ 是 n 个连续整数的积,所以它必能被 $n!$ 整除*. 因此

$$\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)}{n!}$$

是整数.

另一方面,因为从$(m+k+n+1)$ 个不同元素中取$(n+1)$ 个不同元素的组合数

$$C_{m+k+n+1}^{n+1}=\frac{(m+k+1)(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数,而已知 $m+k+1$ 是一个大于 $n+1$ 的素数,所以 $m+k+1$ 不能被分母$(n+1)!$ 中的任一因数整除,因此$(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$ 能被$(n+1)!$ 整除,即

$$\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

是整数.

综上所述,即得$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$ 能被 $C_1C_2\cdots C_n$ 整除.

*"n 个连续整数的积必能被 $n!$ 整除"这个结论可以证明如下:若 n 个连续整数中有一个为零,则其积为零,显然能被 $n!$ 整除;若 n 个连续整数全为正,设其最大数为 $p(p \geqslant n)$,则从 p 个不同元素中取 n 个不同元素的组合数 $C_p^n=[p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)]/n!$ 是整数,即 n 个连续正整数 $p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$ 能被 $n!$ 整除;若 n 个连续整数全为负,则将每个因数变号就可转化为上述情况得以证明.

4 给出两个锐角 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A'B'C'$,求作 $\triangle ABC$ 使它与 $\triangle A'B'C'$ 相似(A,B,C 依次和 A',B',C' 相对应),且外接于 $\triangle A_0B_0C_0$(这里 AB 过 C_0,BC 过 A_0,CA 过 B_0). 再求作这一类三角形中面积最大的一个三角形.

意大利命题

解法 1 以 α,β,γ 表示 $\triangle A'B'C'$ 三内角,在 $\triangle A_0B_0C_0$ 的边 A_0C_0,A_0B_0 上分别向外作圆弧,使其所含的圆周角分别为 β,γ,显然我们只要在 A_0C_0 和 A_0B_0 上作底角分别为 $90°-\beta$ 和 $90°-\gamma$ 的等腰 $\triangle A_0C_0O_1$ 和 $\triangle A_0B_0O_2$,并以 O_1,O_2 为圆心,O_1A_0,O_2A_0 为

半径，即可画出上述的两个圆弧.

如图 9.5 所示，过点 A_0 作直线交两圆弧于 B,C 两点. 联结 BC_0，CB_0 并延长使交于点 A. 由于 $\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$，故 $\angle CAB=\alpha$. 所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，而且 $\triangle A_0B_0C_0$ 是 $\triangle ABC$ 的内接三角形，即 $\triangle ABC$ 是适合所给条件的三角形.

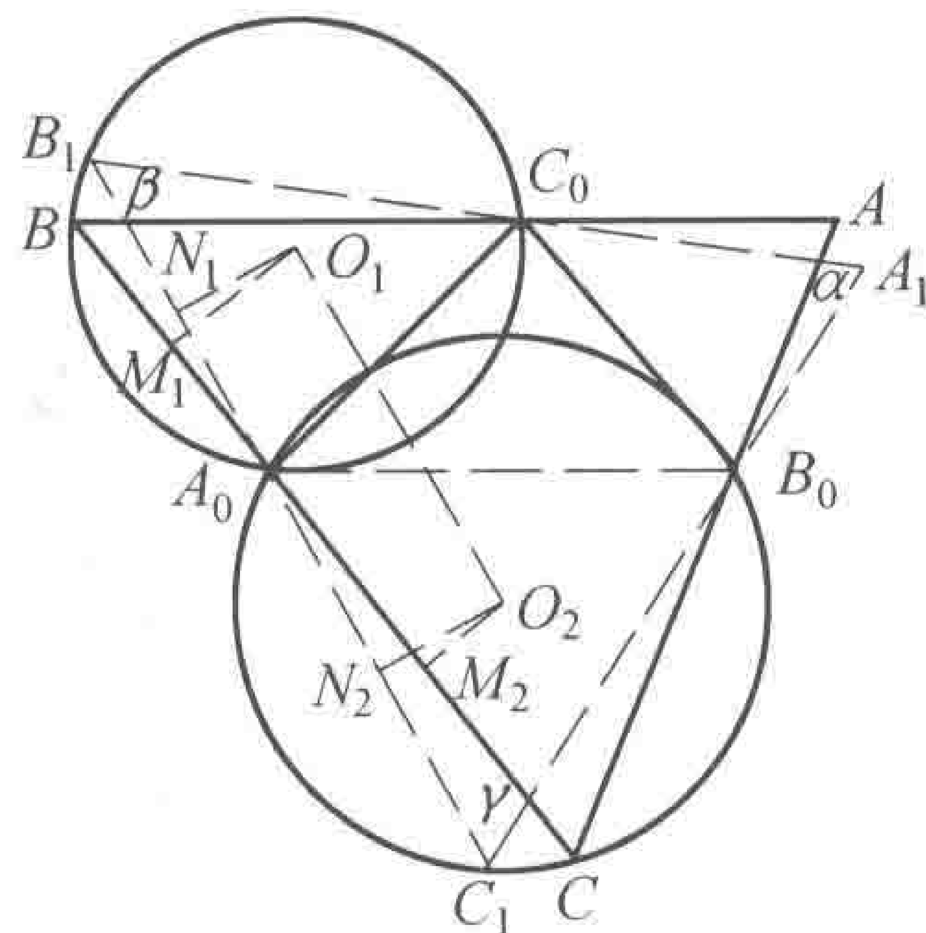


图 9.5

若过点 A_0 所作的诸线段中使 $B_1C_1 /\!/ O_1O_2$，则

$$B_1C_1=2(N_1A_0+A_0N_2)=2O_1O_2$$

而其他的过点 A_0 的线段

$$BC=2(M_1A_0+A_0M_2)<2O_1O_2$$

由于相似三角形面积的比等于对应边长度平方的比. 故

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A_1B_1C_1}=(BC)^2:(B_1C_1)^2<1$$

所以，$\triangle A_1B_1C_1$ 是所求作的这类三角形中面积最大的一个.

解法 2

分析　如图 9.6 所示，设 $\triangle ABC$ 外接于 $\triangle A_0B_0C_0$，且 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，即有 $\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$. 所以点 A 必在以 B_0C_0 为弦、圆周角等于 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 上，点 C 必在以 A_0B_0 为弦、圆周角等于 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 上（$\overset{\frown}{A_0mB_0}$，$\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 都在 $\triangle A_0B_0C_0$ 外）. 这时，过点 B_0 任意作一条直线，与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$，$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别相交于点 A,C，再作直线 AC_0 与 CA_0，设它们相交于点 B，所得的 $\triangle ABC$ 便满足题给的前两个条件.

为使作出的 $\triangle ABC$ 是面积最大的一个，关键在于确定 AC 的位置. 因为上面作出的任意三角形都是相似的（均相似于 $\triangle A_1B_1C_1$），所以只要使作出的三角形的一条对应边长最大就可以了. 设弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$ 的圆心为 O_1，$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 的圆心为 O_3，作 $O_1H_1\perp AB_0$，$O_3H_3\perp CB_0$，垂足分别为 H_1,H_3. 因为 H_1H_3 是 O_1O_3 在 AC 上的射影，显然有 $H_1H_3\leqslant O_1O_3$，当且仅当 $AC /\!/ O_1O_3$ 时，$H_1H_3=O_1O_3$ 为最大. 又因

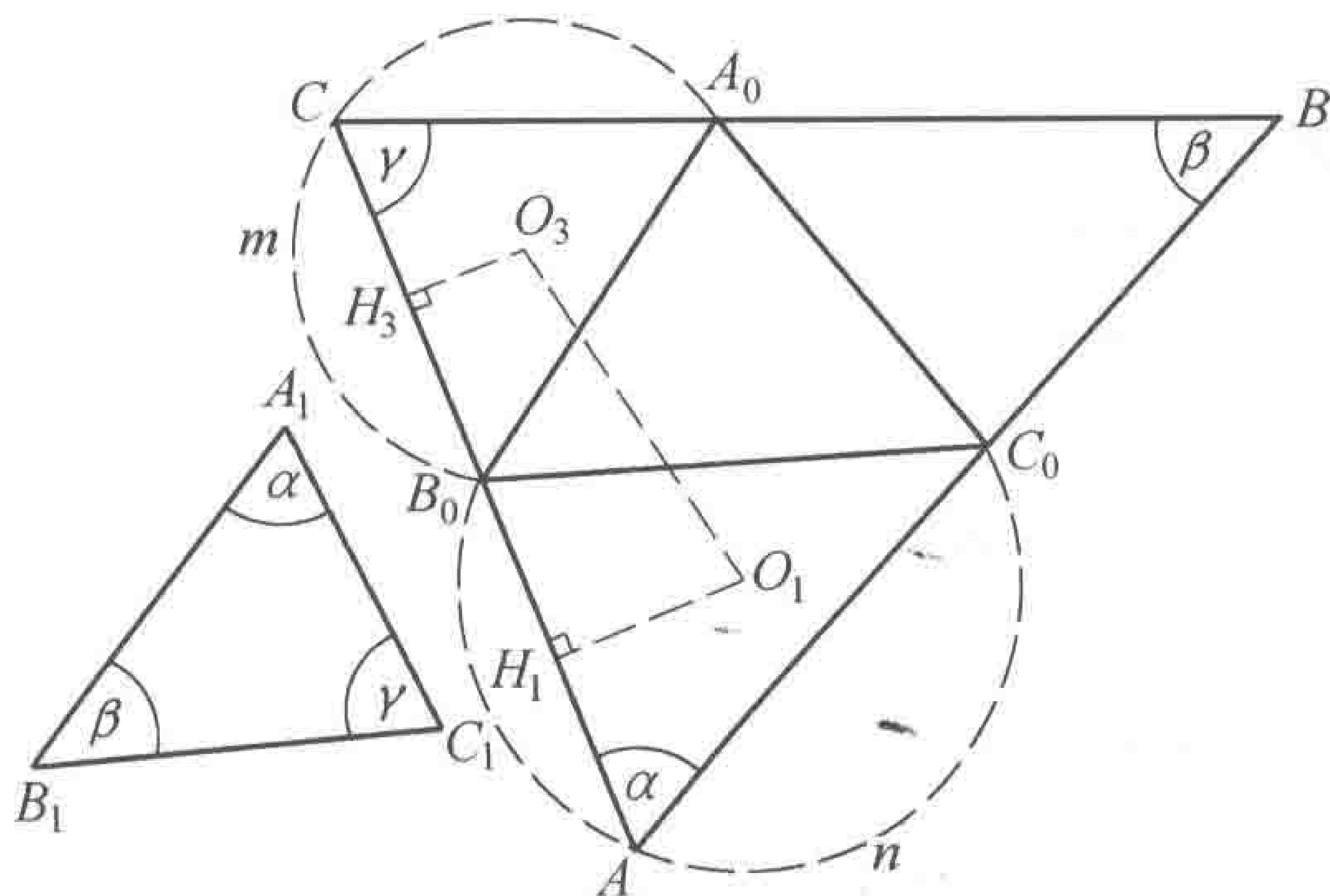


图 9.6

作法（图 9.7）

1）在 $\triangle A_0B_0C_0$ 外部，在 B_0C_0 上作圆周角为 $\angle A_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$，设圆心为 O_1；在 A_0B_0 上作圆周角为 $\angle C_1$ 的弓形弧 $\overset{\frown}{A_0mB_0}$，设圆心为 O_3.

2）过点 B_0 作 $AC /\!/ O_1O_3$，与弓形弧 $\overset{\frown}{B_0nC_0}$，$\overset{\frown}{A_0mB_0}$ 分别交于点 A,C；

3）联结 CA_0，AC_0 并延长相交于点 B. 则 $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形.

证明　略.

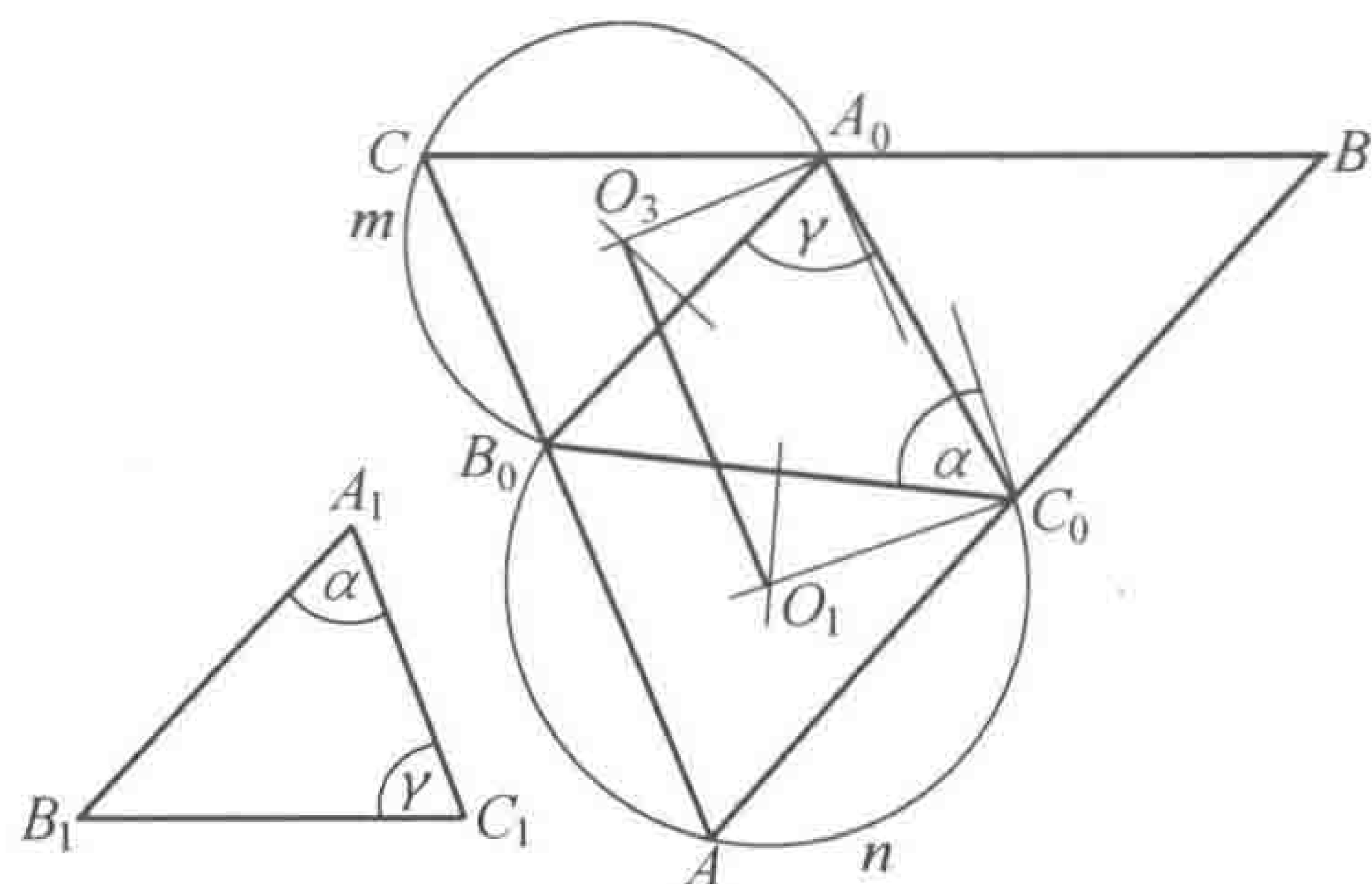


图 9.7

$B_0C=2B_0H_3$, $AB_0=2H_1B_0$, 故 $AC=AB_0+B_0C=2(H_1B_0+B_0H_3)=2H_1H_3$. 所以要使 AC 最大, 必须且只需 H_1H_3 最大, 也就是必须且只需 $AC\parallel O_1O_3$. 由此可得作法.

苏联命题

5 设

$$C_1=a_1+a_2+\cdots+a_8$$
$$C_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2$$
$$\vdots$$
$$C_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 是不全为 0 的实数,如果数列 $C_1,C_2,\cdots$ 中有无限多项 $C_n=0$,试求所有能使 $C_n=0$ 的 n.

解法 1 已知至少有一个 $a_i\neq 0$,故 $C_{2m}=\sum\limits_{i=1}^{8}a_i^{im}>0$,可知 n 只能是奇数.

若 $C_{2m+1}=0$,则在不等于 0 的各项中,有些是正项,有些是负项.在删去每一对绝对值相同而符号相反的项后,假如还剩下 b_1, $b_2,\cdots,b_r(0<r\leqslant 8)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{r}b_i^{2m+1}=0$.不妨设 b_1 是正数而且是 b_i 中绝对值最大的项,并以 $b'_1,b'_2,\cdots,b'_t(0<t\leqslant r-1)$ 表示所有负项,其中 b'_j 是绝对值最大的.令 $|b'_j|=M$.由于 $b_1>M$,必有正整数 N 使

$$(b_1/M)^N>t$$

这时只要取 $N>\log_{b_1/M}t$,就有

$$b_1^N+b_1'^N+\cdots+b_t'^N\geqslant b_1^N-tM^N>0$$

因此当 $n>N$ 时就有

$$b_1^n+b_2^n+\cdots+b_r^n>b_1'^N+b_2'^N+\cdots+b_t'^N>0$$

这和数列 $C_1,C_2,\cdots$ 有无限多项为 0 的原设矛盾.所以,在 a_1, $a_2,\cdots,a_8$ 中,除 0 项外,余下的都是一对一对的绝对值相等而符号相反的项.所以

$$C_{2m+1}=0, m=0,1,2,\cdots$$

即所有能使 $C_n=0$ 的 n 是所有正奇数.

推广　若所给的 n 个等式是 $C_k=a_1^k+a_2^k+\cdots+a_t^k$，$t$ 是任意正整数，本题的解仍是所有正奇数，且其解法也是一样.

解法 2　因为对于任意正偶数 n 有

$$a_i^n\geqslant 0, i=1,2,\cdots,8$$

等号当且仅当 $a_i=0$ 时成立. 所以对于不全为零的实数 $a_i(i=1,2,\cdots,8)$，必有

$$c_n=\sum_{i=1}^{8}a_i^n>0, n\text{ 为任意正偶数}$$

因此由题给条件可知，能使 $c_n=0$ 的正整数 n 不可能为偶数，而只可能为奇数.

由已知，$\{c_n\}$ 中有无限多项等于零，而对于任意正偶数 n，对应的 $c_n\neq 0$，所以必有无限多个正奇数 n，对应的 $c_n=\sum\limits_{i=1}^{8}a_i^n$ 等于零. 在此基础上，我们可以进一步证明：八个数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 能分成四对，每一对互为相反数.

用反证法. 假定 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 中存在着不成这种对的某些 a_i，设这些 a_i 中最大的绝对值为 $b(b>0)$，并设有 p 个为 b，q 个为 $-b$，$p\neq q$. 从而 $|p-q|\geqslant 1$. 这时，八个数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 可以分为三类，第一类是绝对值大于 b 的数（如果存在的话），由假设可知，它们是成对出现的（每一对互为相反数），因而它们的奇次幂之和等于零；第二类是绝对值等于 b 的数，它们的奇次幂之和为 $(p-q)b^n$，其绝对值等于 $|p-q|b^n$；第三类是绝对值小于 b 的数，设其绝对值最大为 d，显然 $b>d>0$，且其个数小于 8，它们的奇次幂之和必定大于 $-8d^n$. 所以可得

$$|c_n|=\left|\sum_{i=1}^{8}a_i^n\right|>|p-q|b^n-8d^n$$

对于充分大的奇数 n，必有 $|c_n|>0$. 事实上，若取 $n>\dfrac{\lg 16}{\lg b-\lg d}$，即有

$$n\lg\frac{b}{d}>\lg 16$$

即

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n>16$$

由 $|p-q|\geqslant 1$ 可知 $|p-q|-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，即

$$16=\frac{8}{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{8}{|p-q|-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{b}{d}\right)^n \geqslant \frac{8}{|p-q|-\frac{1}{2}}$$

$$\left(|p-q|-\frac{1}{2}\right)b^n \geqslant 8d^n$$

即
$$|c_n| > |p-q|b^n - 8d^n \geqslant \frac{1}{2}b^n > 0$$

这就是说,从 $n=\left[\frac{\lg 16}{\lg b-\lg d}\right]+1$ 以后的全部奇次幂之和 C_n 均不等于零,与已知矛盾.

这就证明了 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 这八个数可以分成四对,每一对互为相反数.从而对于任意正奇数 n,对应的 $C_n=\sum_{i=1}^{8}a_i^n$ 都等于零.由此即得所求的正整数 n 为一切正奇数.

解法 3 (1) 根据题设,不失一般性,我们可以对数 a_i 作如下限制:$a_i=0$ 或 $|a_i|>1$,$i=1,2,\cdots,8$,且其中至少有一个 $|a_i|>1$.

若 $|a_i|\leqslant 1$,$i=1,2,\cdots,8$,我们对所有的 a_i 同乘以因子 $\gamma\neq 0$,使得对所有的 $a_i\neq 0$,有 $|\gamma a_i|>1$,然后都相加起来,考查

$$C'_k=\sum_{i=1}^{8}(\gamma a_i)^k=\gamma^k C_k$$

由于 $\gamma\neq 0$,所以 C'_k 当且仅当 $C_k=0$ 时才为零,于是只需考查数列 $\{C'_k\}$ 就可得到同样的结果.

(2) 显然,对于所有的自然数 m,有 $C_{2m}>0$.因为

$$a_i^{2m}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,8$$

且至少有一个 $a_i^{2m}>0$,所以

$$C_{2m}=\sum_{i=1}^{8}a_i^{2m}>0$$

因此,我们将只限于考查其中 n 为奇数的各项.

(3) 由(1),不妨设

$$|a_1|\geqslant|a_2|\geqslant\cdots\geqslant|a_8|, \text{且 } |a_1|>1 \qquad ①$$

我们考查

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}a_1^n\left(1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n\right) \qquad ②$$

当 $|a_2|<|a_1|$ 时,由于 ① 有 $|a_i|<|a_1|$,$i=2,3,4,\cdots,8$,因而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n=0, i=2,3,4,\cdots,8$$

也就是 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_1^n=\infty$,因此必有这样的 N 存在,使得对于所有的 $n>N$,有 $C_n\neq 0$.但这表示不能有无穷多个 $C_n=0$,与题设

矛盾. 由此得 $|a_2|=|a_1|$,并且由 ① 可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n, i=2,3,\cdots,8$$

可能趋于极限 $+1$, -1 或 0.

(4) 由于数列$\{C_n\}$中存在无穷多个 $C_n=0$,因此在表达式 ② 的外括号中至少有一个极限值为 -1,即在 $a_2,a_3,\cdots,a_8$ 中有一个 a_j,使得 $-a_j=a_1$,这样由于 a_1,a_j 有同次幂,当 n 为奇数时,有

$$a_1^n+a_j^n=0$$

在 $a_i(i=1,2,3,\cdots,8)$ 中并不一定只有一对 a_1 与 $a_j(a_1=-a_j)$. 用完全类似的方法,将余下的 a_i 中绝对值最大的当做前面讨论时的 a_1,一定又可以找到另一对 a_x,a_y,使得 $a_x=-a_y$. 再继续两次,我们就得到结果:a_i 中有四对,每对中的两个数绝对值相等,符号相反.

因此,当且仅当 n 为奇数时,$C_n=0$.

6 某次运动会相继开了 $n(n>1)$ 天,共发出奖牌 m 枚. 第一天发出奖牌一枚又余下的 $m-1$ 枚的 1/7,第二天发出两枚又余下的 1/7,依此类推,最后在第 n 天发出 n 枚而没有剩下奖牌. 问这次运动会共开了几天? 共发了几枚奖牌?

匈牙利命题

解法 1 设 u_k 是第 k 天未发奖牌前所剩下的奖牌数,则在第 k 天所发的奖牌数为

$$k+\frac{1}{7}(u_k-k)$$

于是
$$u_{k+1}=u_k-\left[k+\frac{1}{7}(u_k-k)\right]=\frac{6}{7}(u_k-k)$$

所以
$$u_k-\frac{7}{6}u_{k+1}=k$$

已知 $u_1=m, u_n=n$,故有

$$m-\frac{7}{6}u_2=1$$

$$u_2-\frac{7}{6}u_3=2$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1}-\frac{7}{6}n=n-1$$

用 $\left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}$ 乘上面第 k 式并相加,得

$$m=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$$

$$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

以上两式相减,得

$$-\frac{1}{6}m=\left(1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n=$$

$$6\left(\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right)-n\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

所以
$$m=36+(n-6)\frac{7^n}{6^{n-1}}$$

当 $n>1$ 时,$|n-6|<6^{n-1}$,而且 7^n 和 6^{n-1} 互素.故 $n-6=0$.所以

$$n=6,m=36$$

解法 2 设第 k 天发出的奖牌数为 $V(k)$,则

$$V(1)=1+\frac{1}{7}(m-1)$$

$$V(2)=2+\frac{1}{7}(m-V(1)-2)=\frac{6}{7}(1+V(1))$$

$$\vdots$$

$$V(k)=k+\frac{1}{7}(m-V(k-1)-k)=\frac{6}{7}(1+V(k-1))=$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{k-2}+\cdots+\frac{6}{7}$$

$$\vdots$$

$$V(n)=\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}V(1)+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{6}{7}$$

将上面 n 个等式相加,得

$$m=\sum_{k=1}^{n}V(k)=\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-1}\right)V(1)+$$

$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-1}\right)+$$

$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^{n-2}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2\right)+\frac{6}{7}=$$

$$(6+m)\left(1-(\frac{6}{7})^n\right)+6\left(1-(\frac{6}{7})^{n-1}\right)+\cdots+6(1-\frac{6}{7})=$$

$$6n-6\left(\frac{6}{7}+(\frac{6}{7})^2+\cdots+(\frac{6}{7})^n\right)+m-m(\frac{6}{7})^n=$$

$$6n-6^2\left(1-(\frac{6}{7})^n\right)+m-m(\frac{6}{7})^n$$

经整理,得

$$m=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36 \qquad ①$$

对于 $n>1$ 显然有

$$|n-6|<6^{n-1},(7^n,6^{n-1})=1 \qquad ②$$

由 ① 和 ②，再根据 m 和 n 是正整数，就得到 $n=6$，从而得 $m=36$.

因此，运动会共开了 6 天，共发出 36 枚奖牌，在这 6 天中每天都正好发出 6 枚奖牌.

第 9 届国际数学奥林匹克英文原题

The ninth International Mathematical Olympiad was held from July 2nd to July 13th 1967 in the city of Cetinje.

1 Let $ABCD$ be a parallelogram such that $AB=a$, $AD=1$, $\angle BAD=\alpha$ and ABD is an acute triangle. Show that it is possible to cover the parallelogram with unit circles K_A, K_B, K_C, K_D of centres A, B, C, D respectively, if and only if

$$a \leqslant \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$$

(Poland)

2 We are given a tetrahedron such that only one edge has length greater than 1. Show that the volume of the tetrahedron does not exceed $\frac{1}{8}$.

(Czechoslovakia)

3 Let k, m, n be positive integers such that $m+k+1$ is a prime number greater than $n+1$. Let us denote $C_s=s(s+1)$. Show that the product

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

is divisible by $C_1 C_2 \cdots C_n$.

(United Kingdom)

4 Let $A_0B_0C_0$ and $A_1B_1C_1$ be acute triangles. Find the triangle ABC, similar to the triangle $A_1B_1C_1$ (in this order), $A_0B_0C_0$ being inscribed in ABC such that $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$, $B_0 \in CA$ and ABC has maximum area.

(Italy)

5 Let $a_1, a_2, \cdots, a_8$ be real numbers, at least one different from zero. The sequence $(c_n)_{n\geqslant 1}$ is defined by $c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^2$. There are infinitely many terms of the sequence which are 0.

Find all values n for which $c_n=0$.

(USSR)

6 In a sportive competition m medals were awarded during n days. First day one medal and a seventh of the remaining ones were awarded. Second day two medals and a seventh of the remaining ones were awarded. Last day the last n medals were awarded. How many days the competition ran over and how many medals have been awarded?

(Hungary)

第 9 届国际数学奥林匹克各国成绩表

1967，南斯拉夫

名次	国家或地区	分数（满分 336）	奖牌 金牌	银牌	铜牌	参赛队人数
1.	苏联	275	3	3	2	8
2.	德意志民主共和国	257	3	3	1	8
3.	匈牙利	251	2	3	3	8
4.	英国	231	1	2	4	8
5.	罗马尼亚	214	1	1	4	8
6.	保加利亚	159	1	—	1	8
7.	捷克斯洛伐克	159	—	1	3	8
8.	南斯拉夫	136	—	—	3	8
9.	瑞典	135	—	—	2	8
10.	意大利	110	—	1	1	6
11.	波兰	101	—	—	1	8
12.	蒙古	87	—	—	1	8
13.	法国	41	—	—	—	5

第五编
第 10 届国际数学奥林匹克

第 10 届国际数学奥林匹克题解

苏联,1968

1 证明:只有一个三角形,它三边的长度是连续正整数,而且一个角是另一个角的两倍.

罗马尼亚命题

证法 1　设三边的长度为 $b-1,b,b+1$,其对角依次为 α,β,γ,显然 $\alpha<\beta<\gamma$. 由于三角形两边长度的和必大于第三边的长度,故 $b\geqslant 3$.

应用余弦定理,得

$$\cos\alpha=\frac{b^2+(b+1)^2-(b-1)^2}{2b(b+1)}=\frac{b+4}{2(b+1)} \quad ①$$

$$\cos\beta=\frac{(b+1)^2+(b-1)^2-b^2}{2(b+1)(b-1)}=\frac{b^2+2}{2(b^2-1)} \quad ②$$

$$\cos\gamma=\frac{b^2+(b-1)^2-(b+1)^2}{2b(b-1)}=\frac{b-4}{2(b-1)} \quad ③$$

可知 $\cos\alpha,\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 都是有理数.

若 $b\geqslant 7$,则 $\cos\alpha\leqslant\frac{11}{16}<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 在这种情形下,$\beta>\alpha>45^\circ$,故 $\gamma<90^\circ$,不可能有一个角等于另一个角的两倍. 因此 b 的可能值限于 3,4,5,6 四个数.

若 $\beta=2\alpha$,则

$$\cos\alpha=\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} \quad ④$$

把 $b=3,4,5,6$ 分别代入 ②,然后把所得的 $\cos\beta$ 的值分别代入 ④,结果都不是有理数. 故 $\beta\neq 2\alpha$.

若 $\gamma=2\alpha$ 或 $\gamma=2\beta$,则

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \text{ 或 } \cos\beta=\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \quad ⑤$$

把 $b=3,4,5,6$ 分别代入 ③,然后把所得的 $\cos\gamma$ 的值分别代入 ⑤,只有当 $b=5$ 时,结果是有理数 $\frac{3}{4}$.

当 $b=5$ 时,由 ② 得 $\cos\beta=\frac{9}{16}\neq\frac{3}{4}$,故 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$,$\gamma=2\alpha$,所以边长为 4,5,6 的三角形是本题的唯一解.

证法 2 仍用 $b-1,b,b+1(b\geqslant 3)$ 表示三边的长度，α,β,γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 表示其对角，由余弦定理得 ①，②，③.

若 $\beta=2\alpha$，则由正弦定理，得

$$\frac{b-1}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b}{2(b-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{b}{b-1}=\frac{b+4}{b+1}(\text{由 ①})\Rightarrow b^2+b=b^2+3b-4\Rightarrow b=2$$

不合题意.

若 $\gamma=2\beta$，则由正弦定理，得

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b+1}{\sin 2\beta}=\frac{b+1}{2\sin\beta\cdot\cos\beta}\Rightarrow\cos\beta=\frac{b+1}{2b}\Rightarrow$$

$$\frac{b+1}{b}=\frac{b^2+2}{b^2-1}(\text{由 ②})\Rightarrow b^2-3b-1=0$$

没有有理数解，不合题意.

若 $\gamma=2\alpha$，则由正弦定理，得

$$\frac{b-1}{\sin\alpha}=\frac{b+1}{\sin 2\alpha}=\frac{b+1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b+1}{2(b-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{b+1}{b-1}=\frac{b+4}{b+1}(\text{由 ①})\Rightarrow b=5$$

故边长为 4，5，6 的三角形是具有题述性质的唯一三角形.

证法 3 设 $\triangle ABC$ 满足题设条件，即 $AB=n,AC=n-1$，$BC=n+1$（其中 n 是大于 1 的自然数），并且 $\triangle ABC$ 的内角分别为 $\alpha,2\alpha$ 和 $\pi-3\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$.

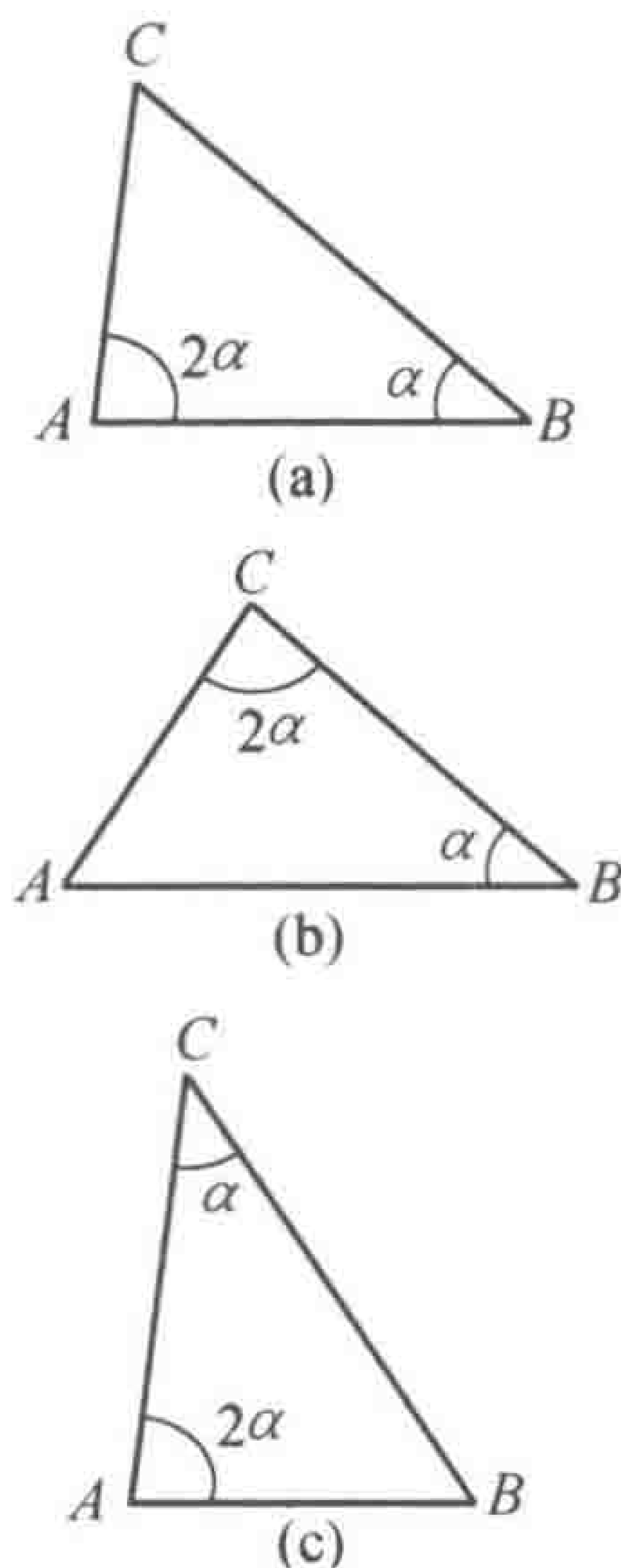


图 10.1

由于在同一三角形中，较大的边所对的角也较大，因此可能出现的情况只有如图 10.1 所示的三种.

因为

$$\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$4\cos^2\alpha-1=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1$$

所以利用正弦定理可知在情况(a)中有

$$\frac{n}{n-1}=\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1$$

从而得到 $n^2-5n=0$，即 $n=5$.

同样，在情况(b)中有

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1$$

从而得到 $n^2-2n=0$，即 $n=2$，这是不合要求的，因为长度分别为 1，2，3 的三条线段不能构成三角形.

在情况(c)中有

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2}-1$$

从而得到

$$n^{2}-3n-1=0$$

但是这个方程没有整数解,因而也不存在满足题设条件的三角形.

综上所述,满足题设条件的三角形的三边长只有 4,5,6 三个自然数.

再来证明这样构成的三角形的三个内角中确有一个内角是另一个内角的两倍.

由余弦定理可得

$$\cos B=\frac{5^{2}+6^{2}-4^{2}}{2\times 5\times 6}=\frac{3}{4},0<\angle B<\frac{\pi}{2}$$

$$\cos A=\frac{4^{2}+5^{2}-6^{2}}{2\times 4\times 5}=\frac{1}{8}=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2}-1=$$

$$\cos 2B,0<\angle A<\frac{\pi}{2}$$

所以

$$A=2B$$

2 设 $p(x)$ 是十进制数各位数字的积,试求出所有能使 $p(x)=x^{2}-10x-22$ 成立的正数 x.

捷克斯洛伐克命题

解法 1 设 x 是一位数,则

$$p(x)=x=x^{2}-10x-22$$

即

$$x^{2}-11x-22=0$$

这个二次方程没有整数解.

设 x 是 $n(n>1)$ 位数,则

$$x\geqslant 10^{n-1}a_{n}>9^{n-1}a_{n}\geqslant p(x)$$

其中,a_n 是第 n 位数字. 所以

$$p(x)=x^{2}-10x-22<x\Rightarrow x^{2}-11x-22<0$$

由于 x 是正数,故由上面的不等式得

$$0<x<\frac{11+\sqrt{209}}{2}<13$$

若 $x=10$,则

$$p(x)=0,x^{2}-10x-22=-22\neq p(x)$$

若 $x=11$,则

$$p(x)=1,x^{2}-10x-22=-11\neq p(x)$$

若 $x=12$,则

$$p(x)=2,x^{2}-10x-22=2=p(x)$$

所以,$x=12$ 是本题的唯一解.

解法2 设十进制自然数 x 的数字个数为 n，并且 x 满足题设条件，于是应有

$$p(x) \leqslant 9^n, x \geqslant 10^{n-1}$$

ⅰ 若 $n=1$，则有 $p(x)=x$，即

$$x^2-10x-22=x$$

但是这个二次方程没有整数解，故知 n 不能为 1.

ⅱ 若 $n=2$，则有

$$x^2-10x-22=p(x) \leqslant 81$$

从而
$$x^2-10x+25=p(x)+47 \leqslant 128$$

$$|x-5| \leqslant \sqrt{128} < 12$$

$$-7 < x < 17$$

又因为 $x \geqslant 10$，所以

$$10 \leqslant x \leqslant 16$$

另一方面，由

$$p(x)+47=(x-5)^2 \leqslant 128$$

可知，$p(x)+47$ 是一个整数的平方，并且不大于 128，可以就 $x=10,11,12,13,14,15,16$ 逐一检验如下.

x	10	11	12	13	14	15	16
$p(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)+47$	47	48	49	50	51	52	53

由此可见，只有 $x=12$ 符合要求. 不难验证，这个数满足题意.

ⅲ 若 $n>2$，则因 $x \geqslant 10^{n-1}$，故有

$$0 < 10^{n-1}-5 \leqslant x-5$$

$$(10^{n-1}-5)^2 \leqslant (x-5)^2$$

$$p(x)=(x-5)^2-47 \geqslant 10^{2n-2}-10^n-22$$

另一方面，由 $n>2$ 可知 $10^n \geqslant 1\,000, 10^{n-2}-2 \geqslant 8$，因此

$$10^n(10^{n-2}-2) \geqslant 8\,000$$

从而

$$p(x) \geqslant 10^{2n-2}-10^n-22=10^n(10^{n-2}-2)+10^n-22 \geqslant 10^n+8\,000-22 > 10^n$$

但是这与 $p(x) \leqslant 9^n$ 矛盾，所以 n 不能大于 2.

综上所述，满足题意的正整数只有 $x=12$.

保加利亚命题

3 给出关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程组

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \vdots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

其中 a, b, c 是实数，且 $a \neq 0$. 令 $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$.

证明：该方程组在实数范围内

(1) 当 $\Delta < 0$ 时，没有解；

(2) 当 $\Delta = 0$ 时，只有一个解；

(3) 当 $\Delta > 0$ 时，多于一个解.

证法 1　把原方程组的 n 个方程的两边分别相加得

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

即

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (b-1)\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = 0 \quad ①$$

考查二次函数

$$Q(x) = ax^2 + (b-1)x + c \quad ②$$

它的判别式是 $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$，它的图像是抛物线. 若 r 是 $Q(x) = 0$ 的解，则 $ar^2 + br + c = r$，以 r 代入原方程组的 x_1 得

$$ar^2 + br + c = x_2 = r$$

从而得

$$x_3 = x_4 = \cdots = x_n = r$$

故 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r$ 也是原方程组的解.

(1) 若 $\Delta < 0$，则 $y = Q(x)$ 的图像和 x 轴不相交，即若 $a > 0$ $(a < 0)$，不论 x_i 取何值，$Q(x_i)$ 都是 x 轴上方（或下方）的点. 因此 $\sum Q_i \neq 0$. 在这种情形下，原方程组没有解.

(2) 若 $\Delta = 0$，则 $y = Q(x)$ 的图像和 x 轴相切，$Q(x) = 0$ 有唯一的根 $(1-b)/2a$. 在这种情形下

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = (1-b)/2a$$

是原方程组的唯一解.

(3) 若 $\Delta > 0$，则 $y = Q(x)$ 的图像和 x 轴相交于两点，即 $Q(x) = 0$ 有两个根 r_1, r_2. 故原方程组至少有两个解，即

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r_1, x_1 = x_2 = \cdots = x_n = r_2$$

证法 2 令 $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$,则证法 1 的 ① 可写成

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (b-1)x + nc = 0 \quad ③$$

根据平方平均值定理,有

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geqslant \frac{x}{n}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{n}x^2$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

若等号成立,原方程组和方程

$$ay^n + (b-1)y + c = 0$$

并无区别,故依 $\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0, =0, > 0$,原方程组无解,或只有一个解,或有两个解.

若等号不成立,令

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}x^2 + k, k > 0$$

于是方程 ③ 变为

$$ax^2 + n(b-1)x + n^2c + ank = 0$$

解得

$$x = \frac{n(1-b) \pm \sqrt{\Delta - 4a^2k/n}}{2a}$$

由于 $4a^2k/n > 0$,故当 $\Delta \leqslant 0$ 时,③ 没有实数解,因而原方程组也没有实数解.

4 证明:任一个四面体总有一个顶点,由这个顶点出发的三条棱可以构成一个三角形的三边.

波兰命题

证明 如图 10.2 所示,设 A,B,C,D 是任意一个四面体的顶点,并设 AB 是最长的棱. 如果由任意一个顶点出发的三条棱都不能构成一个三角形,则由 A 出发的三条棱有

$$AB \geqslant AC + AD$$

又由 B 出发的三条棱有

$$BA \geqslant BC + BD$$

所以

$$2AB \geqslant AC + AD + BC + BD \quad ①$$

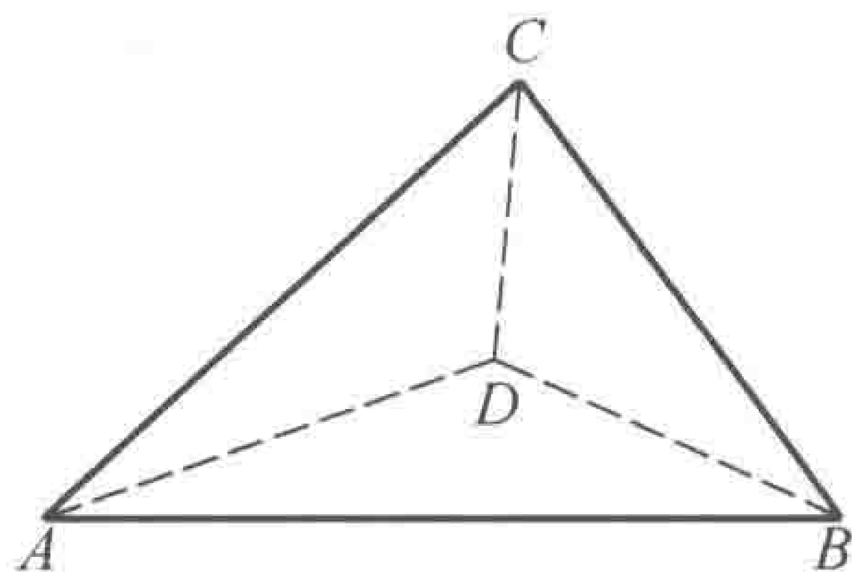


图 10.2

但在 $\triangle ABC$ 中,有 $AB < AC + BC$;在 $\triangle ABD$ 中,有 $AB < AD + BD$. 故

$$2AB < AC + BC + AD + BD \quad ②$$

①,② 两不等式互相矛盾,故由 A 或 B 出发的三条棱,必有一

组可以构成一个三角形.

民主德国命题

5 设 f 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的一个实函数,对于每一个 $x \in \mathbf{R}$,下面的方程皆能成立

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2} \qquad ①$$

其中,常数 a 是正实数.

(1) 证明:f 是周期函数(即有这样的一个实数 $b>0$,使得对于每一个 x 都有 $f(x+b)=f(x)$);

(2) 当 $a=1$ 时,给出一个具有这样性质的函数 f,但 f 不是常值函数.

解 (1) 因对于每一个 $x \in \mathbf{R}$,① 皆能成立,故在 ① 中,x 可用 $x+a$ 替换,于是有

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2}$$

上面根号内的式子等于

$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}+f(x)-(f(x))^2\right)=\frac{1}{4}-f(x)+(f(x))^2=\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2$$

所以

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-f(x))^2}=\frac{1}{2}+\left|\frac{1}{2}-f(x)\right|$$

由于 $f(x+a)\geqslant\frac{1}{2}$,故对于每一个 $x \in \mathbf{R}$,$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$. 由此可推出

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+(f(x)-\frac{1}{2})=f(x)$$

即 f 是周期函数,它的周期是 $2a$.

(2) 当 $a=1$ 时,下面是一个具有题述性质的周期函数,即

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|\right)$$

它的周期为 2.

因为

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\frac{1}{2}\left(1+\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)=\\&\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)=\\&\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}{2}\cdot\frac{1-\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|}{2}}=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)(1-f(x))}=$$
$$\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

此推广属于朱恒丕

推广

推广 1 已知 λ,μ 是不相等的常数，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数且满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

其中，$a\neq 0,a,b\in\mathbf{R}$. 求证：$f(x)$ 是周期函数.

推广 1 的证明 先证 $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

的周期性.

显然，$f(x)\geqslant\frac{a}{2}$. 因为

$$f(x+\lambda-\mu)=f((x-\mu)+\lambda)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)}$$

所以 $f(x+2\lambda-2\mu)=f((x+\lambda-\mu)+\lambda-\mu)=$

$$\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x+\lambda-\mu)-f^2(x+\lambda-\mu)}=\frac{a}{2}+$$
$$(b+a(\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)})-$$
$$(\frac{a}{2}+\sqrt{b+af(x)-f^2(x)})^2)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-af(x)+f^2(x)}=\frac{a}{2}+\left|\frac{a}{2}-f(x)\right|=f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数，并且 $2|\lambda-\mu|$ 是它的一个周期.

同理可证，$f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda)=\frac{a}{2}-\sqrt{b+af(x+\mu)-f^2(x+\mu)}$$

时，$f(x)$ 也是周期函数且 $2|\lambda-\mu|$ 是它的一个周期.

当 $a=1,b=0,\mu=0$ 时，推广 1 即为原竞赛题.

推广 2 已知 $\{\lambda_n\}$ 是公差不为零的等差数列，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的函数且满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}\pm\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

其中，$a\neq 0,a,b\in\mathbf{R}$. 求证：$f(x)$ 是周期函数.

推广 2 的证明 先证 $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

的周期性.

显然，$f(x)\geqslant\frac{a}{2}$. 因为

$$(f(x+\lambda_1)-\frac{a}{2})^2=b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))$$

$$f^2(x+\lambda_1)-af(x+\lambda_1)+\frac{a^2}{4}=b+\sum_{i=2}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))+af(x+\lambda_n)-f^2(x+\lambda_n)$$

所以 $f^2(x+\lambda_n)-af(x+\lambda_n)+\frac{a^2}{4}=$

$$b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))(f(x+\lambda_n)-\frac{a}{2})^2=$$

$$b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))$$

即

$$f(x+\lambda_n)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=1}^{n-1}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

设等差数列$\{\lambda_n\}$的公差为 d，则

$$f(x+d+\lambda_n)=\frac{a}{2}+\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(af(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

于是
$$f(x+\lambda_1)=f(x+d+\lambda_n)$$

即
$$f(x)=f(x+d+\lambda_n-\lambda_1)$$

故 $f(x)$ 是周期函数且

$$|d+\lambda_n-\lambda_1|=|nd|=n|d|$$

是其一个周期.

同理可证，$f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda_1)=\frac{a}{2}-\sqrt{b+\sum_{i=2}^{n}(f(x+\lambda_i)-f^2(x+\lambda_i))}$$

时，$f(x)$ 也是周期函数且 $n|d|$ 是其一个周期.

6 设$[x]$表示不超过 x 的最大整数，试求

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

的值，其中 n 是任意自然数.

英国命题

解法 1 **引理** 对于任意实数 x，下式皆能成立，即

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]-\left[\frac{x}{2}\right] \qquad ①$$

引理的证明

若 $0\leqslant x<1$,则 $\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]=\left[\frac{x}{2}\right]=0$,故 ① 成立;

若 $1\leqslant x<2$,则 $\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]=1,\left[\frac{x}{2}\right]=0$,故 ① 也成立.

若 x 是任意实数,则 $x=2m+y,m$ 是整数,$0\leqslant y<2$. 这时

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]=\left[m+\frac{y+1}{2}\right]=m+\left[\frac{y+1}{2}\right]=$$
$$m+[y]-\left[\frac{y}{2}\right]=$$
$$2m+[y]-\left(m+\left[\frac{y}{2}\right]\right)=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]$$

引理得证.

下面证明本题.

设 $2^k\leqslant n\leqslant 2^{k+1}$,在 ① 中分别以 $n,n/2,n/2^2,\cdots,n/2^k$ 代替 x,得

$$[n]-\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]$$
$$\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]=\left[\frac{n+2}{2^2}\right]$$
$$\left[\frac{n}{2^2}\right]-\left[\frac{n}{2^3}\right]=\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]$$
$$\vdots$$
$$\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

以上各式相加,得

$$[n]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

但是 $[n]=n,\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0,\left[\frac{n+2^{k+j-1}}{2^{k+j}}\right]=0,j=2,3,\cdots$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n \qquad ②$$

解法 2 应用初等集论的语言,本题可解答如下.

设 $N=\{1,2,3,\cdots,n\},2^k\leqslant n<2^{k+1}$. 用 $S(2^j)$ 表示 N 中所有能被 2^j 整除但不能被 2^{j+1} 整除的自然数集. 则 $S(2^j)(0\leqslant j\leqslant k)$ 是 N 的子集. 若 $i\neq j$,则

$$S(2^i)\cap S(2^j)=\varnothing$$

而且 $$N=\bigcup_{0\leqslant j\leqslant k} S(2^j)$$

用 $\overline{\overline{N}}$ 和 $\overline{\overline{S}}(2^j)$ 分别表示 N 中和 $S(2^j)$ 中元素的数目，则由解法 1 中引理得

$$\overline{\overline{S}}(2^j)=\left[\frac{n}{2^j}\right]-\left[\frac{n}{2^{j+1}}\right]=\left[\frac{n+2^j}{2^{j+1}}\right]$$
$$\overline{\overline{N}}=n$$

因 $\overline{\overline{N}}=\sum_{j=0}^{k}\overline{\overline{S}}(2^j)$，$\overline{\overline{S}}(2^j)=0(j>k)$，故 ② 成立.

解法 3　首先，对于任何正整数 n，当 $2^k>n$ 时，必有

$$\frac{n}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}$$

即 $$\frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1$$

从而当 $2^k>n$ 时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$$

由此可知，对于任何正整数 n，总可找到一个非负整数 $l=[\log_2 n]$，使得当 $k>l$ 时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$$

当 $k\leqslant l$ 时

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\neq 0 \qquad ③$$

因而所求的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{l}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

令 $C_k=\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right](k=0,1,\cdots,l)$，则 C_k 是具有下列性质的正整数 m 中的最大者，即

$$m\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$$

即

$$2^{k+1}m-2^k\leqslant n \qquad ④$$

考虑下面的数列

$$\{2^{k+1}m-2^k\},k=0,1,\cdots,l;m=1,2,\cdots,C_k \qquad ⑤$$

由于每一个 k 对应数列 ⑤ 的 C_k 项，因而数列 ⑤ 的项数为 $\sum_{k=0}^{l}C_k$，并且，由于

$$2^{k+1}m-2^k=2^k(2m-1)$$

所以，数列 ⑤ 的每一项都是形如 $2^k(2m-1)$ 且不大于 n 的正整

数.

另一方面,每个不大于 n 的正整数 S 都可以唯一地表示成 $S=2^k(2m-1)$ 的形式,并且,在这个表达式中有 $0\leqslant k\leqslant l$,$1\leqslant m\leqslant C_k$(因为由 $S\geqslant 1$ 可知 $m\geqslant 1$,又由于 $m=\frac{S+2^k}{2^{k+1}}\leqslant\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$,所以由 ③ 可知 $0\leqslant k\leqslant l$,并且 $m\leqslant\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=C_k$). 这就表明,1,2,…,$n$ 中的每个数都出现在数列 ⑤ 中,而且只出现一次,因此,数列 ⑤ 的项数为 n. 于是

$$\sum_{k=0}^{l}C_k=n$$

从而所求的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n$$

第 10 届国际数学奥林匹克英文原题

The tenth International Mathematical Olympiad was held from July 5th to July 18th 1968 in the cities of Moscow and Leningrad (Sant Petersburg).

1 Show that there exists only one triangle whose sides are expressed by three consecutive positive integers and an angle is twice of another angle.

(Romania)

2 Find all positive integers x such that the product of its digits in the decimal representation is $x^2-10x-22$.

(Czechoslovakia)

3 The following system of equations is given

$$ax_1^2+bx_1+c=x_2$$
$$ax_2^2+bx_2+c=x_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n$$
$$ax_n^2+bx_n+c=x_1$$

where a,b,c are real numbers, $a\neq 0$. Prove that:

a) the system has no real solutions in the case

$$(b-1)^2-4ac<0$$

b) the system has a unique real solution in the case

$$(b-1)^2-4ac=0$$

c) the system has many real solutions in the case

$$(b-1)^2-4ac>0$$

(Bulgaria)

4 Show that in any tetrahedron may find a vertex such that the edges arising from it are the sides of a triangle.

(Poland)

5 Let a be a real number and $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ be a function such that for any real number x

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

a) Show that f is a periodic function;

b) In the case $a=1$, find such a nonconstant function f.

(East Germany)

6 Let n be a positive integer. Find with proof a closed formula for the sum

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

(United Kingdom)

第10届国际数学奥林匹克各国成绩表

1968,苏联

名次	国家或地区	分数	奖牌			参赛队
		（满分320）	金牌	银牌	铜牌	人数
1.	德意志民主共和国	304	5	3	—	8
2.	苏联	298	5	1	2	8
3.	匈牙利	291	3	3	2	8
4.	英国	263	3	2	2	8
5.	波兰	262	2	3	2	8
6.	瑞典	256	1	2	5	8
7.	捷克斯洛伐克	248	2	4	—	8
8.	罗马尼亚	208	1	1	2	8
9.	保加利亚	204	—	3	1	8
10.	南斯拉夫	177	—	—	3	8
11.	意大利	132	—	—	1	8
12.	蒙古	74	—	—	—	8

第六编

第1～10届国际数学奥林匹克预选题

第 1～8 届国际数学奥林匹克一些预选题

1 在平面上给出 $n(n>3)$ 个点，其中任何三个点都不共线．是否一定存在一个至少通过其中三个点的圆，使得其内部不包含任何其他给定的点？

2 n 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，满足等式 $a_1a_2\cdots a_n=1$，证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$$

3 一个正三棱柱的高为 h，底边长为 a．在两个底面的中心处都有一个小孔．而三个垂直的面的内面都是镜面．光线从顶面的小孔进入，在每个垂直面上反射一次最后从底面的小孔出去．求出光线入射的角度和在棱柱内部通过的长度．

4 在平面上给了 5 个点，其中任何三点都不共线．证明：其中必有四个点构成凸四边形．

5 对任意满足关系 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3}$ 的变量，证明不等式

$$\tan\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}+\tan\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}>1$$

6 一个凸的平面多边形 M 的周长为 l，面积为 S．设 $M(R)$ 是空间中距离 M 中的点至多为 R 的所有点的集合．证明这个集合的体积 $V(R)$ 满足

$$V(R)=\frac{4}{3}\pi R^3+\frac{\pi}{2}lR^2+2SR$$

7 如何放置两个无限的圆柱才能使它们的交位于一个平面上？

8 给了一袋糖，一架双盘的天平和一个 1 克的砝码．怎样用最少的次数称出 1 千克的糖？

9 求出使得

$$\frac{\sin 3x\cos(60^\circ-4x)+1}{\sin(60^\circ-7x)-\cos(30^\circ+x)+m}=0$$

成立的 x 的值，其中 m 是一个给定的实数．

10 方程 $x=1\ 964\sin x-189$ 有多少个实数解?

11 是否存在整数 z 使得它可以用两种不同的方式写成 $z=x!+y!$ 的形式,其中 x,y 是满足 $x\leqslant y$ 的自然数?

12 求出数字 x,y,z 使得等式

$$\sqrt{\underbrace{xx\cdots x}_{2n}-\underbrace{yy\cdots y}_{n}}=\underbrace{zz\cdots z}_{n}$$

至少对两个 $n\in\mathbf{Z}^+$ 的值成立,并求出所有使等式成立的 n.

13 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数.证明不等式

$$\binom{n}{2}\sum_{i<j}\frac{1}{a_ia_j}\geqslant 4\left(\sum_{i<j}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2$$

并求出使等号成立的条件.

14 计算通过在一个圆周上有 n 个点的圆上做两点之间连线的方法所得出的最多可能的区域的数目.

15 点 A,B,C,D 位于一个圆周上,使得 AB 是直径而 CD 不是.如果过 C 和 D 的切线相交于点 P,而 AC 和 BD 相交于点 Q.证明:PQ 和 AB 互相垂直.

16 给定一个圆心在 S,半径为 1 的圆 K 和一个中心在 M,边长为 2 的正方形 Q.设 XY 是等腰直角$\triangle XYZ$ 的斜边.描述当 X 沿着 K 的边界而 Y 沿着 Q 的边界运动时点 Z 的轨迹.

17 设 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是空间中两个任意的平行四边形,又设 M,N,P,Q 分别以相同的比值划分线段 AA',BB',CC',DD'.

(1)证明:$MNPQ$ 是平行四边形;

(2)求当 M 沿着 AA' 运动时,$MNPQ$ 的轨迹.

18 解方程 $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{p}$,其中 p 是一个实参数.讨论对于 p 的哪些值,方程至少有一个实数解并对给定的 p,确定 $[0,2\pi)$ 中解的数目.

19 给定三角形的三个旁切圆半径,求作三角形.

20 在三个互相垂直的平面内给定三个中心相同的全等矩形,它们的长边也是互相垂直的.考虑以这些矩形的顶点为顶点的多面体.

(1)求出这个多面体的体积;

(2)这个多面体是否可能是正多面体,如果可能,要满足什么条件?

21 一个正圆锥的体积 V 及侧面积 S 满足的不等式

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2\leqslant\left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$$

中等号何时成立?

22 设两个面积相等的平行四边形 P,P' 的边长分别为 a,b 和 a',b'，$a'\leqslant a\leqslant b\leqslant b'$，且线段 b' 可被放入任一平行四边形中. 证明：P 和 P' 可以被分割成四个两两全等的部分.

23 四面体的三个面都是直角三角形而第四个面不是钝角三角形.

(1)证明：第四个面是一个直角三角形的充分必要条件是在某个顶点处恰有两个角是直角；

(2)证明：如果所有的面都是直角三角形，那么四面体的体积就等于不属于同一个面的三个最短边的乘积的六分之一.

24 在房间里有 $n(n\geqslant 2)$ 个人. 证明：在他们中间有两个人的朋友数相等(友谊总是相互的).

25 证明：$\tan 7°30'=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$.

26 (1)证明：$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\leqslant k(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)$，其中 $k\geqslant 1$ 是一个自然数，而 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是任意实数.

(2)如果实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\sqrt{(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$$

证明它们都是非负的.

27 给定圆 K 和直线 g 上一点 P. 做一个通过点 P 且与给定的圆和直线相切的圆.

28 设在平面上给了一个中心在 S，半径为 1 的圆，且设 $\triangle ABC$ 是任意以此圆为外接圆的三角形，使得 $SA\leqslant SB\leqslant SC$. 求顶点 A,B,C 的轨迹.

29 (1)求把 500 表示成相继整数之和的方式的数目.

(2)求出表达式 $N=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ 的数目，其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{N}$. 其中哪些表达式是自然数?

(3)对任意自然数 N，求出那种表达式的数目.

注 以上两问(2)，(3)似乎条件不全或含义不清.

30 如果 n 是自然数，证明：

(1) $\lg(n+1)>\frac{3}{10n}+\lg n$；

(2) $\lg n! > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-1\right)$.

31 将 m 看成参数,解方程 $|x^2-1|+|x^2-4|=mx$. 哪一对整数 (x,m) 满足这个方程?

32 $\triangle ABC$ 的边长 a,b,c 构成等差数列,另一个 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长也构成等差数列. 设 $\angle A=\angle A_1$,证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似.

33 一个圆内切于另一个圆,大圆内有一个内接的等边三角形. 从三角形的顶点引线段和小圆相切. 证明这些线段之一等于圆外两线段之和.

34 确定所有满足方程 $2^x=3^y+5$ 的正整数对 (x,y).

35 如果 a,b,c,d 是使 ad 为奇数而 bc 为偶数的整数. 证明多项式 ax^3+bx^2+cx+d 的根中至少有一个是无理数.

36 设 $ABCD$ 是圆内接四边形. 证明: $\triangle ABC$, $\triangle CDA$, $\triangle BCD$, $\triangle DAB$ 的重心共圆.

37 证明:从圆内接四边形每条边的中点向对边所引的垂线共点.

38 两个同心圆的半径分别为 R 和 r. 确定和这两个圆都相切且互相不相交的圆的最大可能数目. 证明:这个数介于 $\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}-1$ 和 $\frac{63}{20}\cdot\frac{R+r}{R-r}$ 之间.

39 在平面上给定了一个圆心在 O,半径为 R 的圆和两个点 A,B.

(1)在圆内作一条平行于 AB 的弦 CD 使得 AC 和 BD 相交于圆上一点 P;

(2)证明: P 有两个可能的位置,比如说 P_1 和 P_2. 如果 $OA=a$, $OB=b$, $AB=d$,求 P_1 和 P_2 间的距离.

40 对正实数 p,求出方程

$$\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1$$

的所有正实数解.

41 如果 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个正 n 边形 $(n\geqslant 3)$,有多少个不同的钝角 $\triangle A_iA_jA_k$?

42 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 是整数序列，证明：存在子序列 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_m}$，其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$ 使得 $a_{k_1}^2+a_{k_2}^2+\cdots+a_{k_m}^2$ 可被 n 整除.

43 在平面上给定 5 个点，其中无三点共线. 在每两个点之间连一条线段，并将其染成红色或蓝色，因此没有一个三边都同色的三角形.

(1)证明：①每个点都恰属于两条红色线段和两条蓝色线段；②红色线段构成一条通过每个点的封闭路线；

(2)给出一种染色的例子.

44 在一个 $10\times10\times1$ 的长方体盒子中，最多可以放进多少个半径为 $\frac{1}{2}$ 的球？

45 一个字母表由 n 个字母组成，一个单词最大长度(即这个单词中所包含的字母的个数)是多少？如果

(1)单词中两个相邻的字母总是不同的；

(2)从所给的单词中无论怎样删除字母都不可能得到单词 $abab(a\neq b)$.

46 设

$$f(a,b,c)=\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}$$

证明

$$f(a,b,c)=4\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}$$

47 设直线把三角形分成面积相等的两部分，并且该直线在三角形内部的长度最小，求出具有这种性质的直线的条数. 设三角形的边长为 a,b,c，计算这种直线在三角形内所截的最小长度是多少.

48 求出所有使方程 $x^2+px+3p=0$ 有整数根的正数 p.

49 两个镶有镜子的墙构成一个大小为 α 的角，墙角有一根蜡烛. 问可以看到多少个蜡烛的像.

50 四边形的边长为 a,b,c,d，面积为 S. 证明

$$S\leqslant\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$$

51 学校中，编号为 $1,2,\cdots,n$ 的孩子开始时按照 $1,2,\cdots,n$ 的顺序坐好. 发出命令后，每个孩子可以和其他任意一个孩子交换位置或者不动. 经过两次命令后，他们是否可排成 $n,1,2,\cdots,n-1$ 的顺序？

52 从一张纸的一边剪掉一个面积为 1 的区域，并将其分成 10 个部分，每部分染成 10 种颜色之一. 然后再将这一区域放回纸的另一边并再将其分成 10 部分(不必用同样的方式). 证明：可将起初的区域染成 10 种颜色使得纸两边相同颜色的部分的总面积至少是 0.1.

53 证明：在每个面积为 S 的凸六边形中都可以画一条对角线，使得沿此对角线剪掉的三角形的面积不超过 $\frac{1}{6}S$.

54 求出 100 个相继整数的 8 次方之和的最后两位数.

55 给定 $\triangle ABC$ 的顶点 A 和重心 M，求三角形各角在区间 $[40°,70°]$ 中变动时，点 B 的轨迹.

56 设 $ABCD$ 是使 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，$AD\perp BC$ 的四面体. 证明：此四面体各边的中点位于一个球面上.

57 是否可能在一个立方体的边界上选一个由 100(或 200) 个点组成的集合，使得此集合在立方体的每个等距变换下是不变的. 验证你的答案.

第 9 届国际数学奥林匹克预选题及解答

1 证明数列

$$\frac{107\ 811}{3},\frac{110\ 778\ 111}{3},\frac{111\ 077\ 781\ 111}{3},\cdots$$

中所有的数都是完全立方数.

证明 用 a_n 表示所给数列的第 n 项,则

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n+3}-10^{2n+3}}{9}+7\times\frac{10^{2n+2}-10^{n+1}}{9}+\frac{10^{n+2}-1}{9}\right)=$$

$$\frac{1}{27}(10^{3n+3}-3\times10^{2n+2}+3\times10^{n+1}-1)=\left(\frac{10^{n+1}-1}{3}\right)^3$$

2 证明:$\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\geqslant(n!)^{\frac{2}{n}}$($n$ 是一个正整数),且等号只可能在 $n=1$ 时成立.

证明 $(n!)^{\frac{2}{n}}=((1\times2\times\cdots\times n)^{\frac{1}{n}})^2\leqslant$

$$\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^2=$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

假设存在 $n=a$ 且 $a\neq1$,也能使原不等式等号成立,则应有

$$(a!)^{\frac{2}{a}}=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$$

从而

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$$

于是 $a=1$.

与假设矛盾.所以只有当 $n=1$ 时,等号成立.

3 证明三角不等式 $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}$,其中 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证明 考虑定义在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的函数

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}-\cos x$$

容易算出 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ 以及 $f^{(4)}(x)=\frac{3}{2}-\cos x$. 由于 $f^{(4)}(x)>0$,故 $f'''(x)$ 递增,联合 $f'''(0)=0$,这说明当 $x>0$ 时,$f'''(x)>0$,因此 $f''(x)$ 递增,以此类推,连续运用这种推理即可得出 $f(x)>0$.

4 假设三角形的中线 m_a 和 m_b 互相垂直,证明:

(1) 此三角形的中线对应于一个直角三角形的三条边;

(2) 不等式 $5(a^2+b^2-c^2)\geqslant 8ab$ 成立,其中 a,b,c 是所给三角形的边长.

证明 (1) 设此三角形为 $\triangle ABC$,以 $\triangle ABC$ 为基础,做平行四边形 $ABCD$. 设 K,L 分别是线段 BC 和 CD 的中点,则 $\triangle AKL$ 的边平行且等于 $\triangle ABC$ 的中线. 由此即可得出(1) 的结论.

(2) 利用公式 $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$ 等易于证明 $m_a^2+m_b^2=m_c^2$ 等价于 $a^2+b^2=5c^2$,因而

$$5(a^2+b^2-c^2)=4(a^2+b^2)\geqslant 8ab.$$

5 解方程组

$$\begin{cases}x^2+x-1=y\\ y^2+y-1=z\\ z^2+z-1=x\end{cases}$$

解 如果 x,y,z 之一等于 1 或 -1,那么我们得到解$(-1,-1,-1)$ 和$(1,1,1)$. 我们断言这就是方程组仅有的解.

设 $f(t)=t^2+t-1$. 如果 x,y,z 中有大于1的,比如说 $x>1$,我们就有

$$x<f(x)=y<f(y)=z<f(z)=x$$

矛盾. 由此得出 $x,y,z\leqslant 1$.

现在设如果 x,y,z 中有小于 -1 的,比如说 $x<-1$. 由于 $\min\limits_t f(t)=-\frac{5}{4}$,我们有 $x=f(z)\in\left[-\frac{5}{4},-1\right)$. 而由于 $f\left(\left[-\frac{5}{4},-1\right)\right)=\left(-1,-\frac{11}{16}\right)\subset(-1,0)$,而 $f((-1,0))=\left[-\frac{5}{4},-1\right)$. 这就得出 $y=f(x)\in(-1,0)$,$z=f(y)\in\left[-\frac{5}{4},-1\right)$,以及 $x=f(z)\in(-1,0)$,矛盾. 因此 $-1\leqslant x,y,$

$z \leqslant 1$.

如果 $-1 < x, y, z < 1$，那么 $x > f(x) = y > f(y) = z > f(z) = x$，矛盾. 这就证明了断言.

6 解方程组

$$\begin{cases} |x+y|+|1-x|=6 \\ |x+y+1|+|1-y|=4 \end{cases}$$

解 所给的方程组有两个解：$(-2,-1)$ 和 $\left(-\frac{14}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

7 求出方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2 \\ \vdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

的所有实数解.

解 设 $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$，并设 $\sigma_k, k=1,2,\cdots,n$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的第 k 个初等对称多项式，那么所给的方程组可写成 $S_k = a^k, k=1,2,\cdots,n$. 利用牛顿公式

$$k\sigma_k = S_1\sigma_{k-1} - S_2\sigma_{k-2} + \cdots + (-1)^k S_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1} S_k, k=1,2,\cdots,n$$

易于从方程组得出 $\sigma_1 = a$ 和 $\sigma_k = 0, k=2,\cdots,n$. 由根与系数的关系可知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是多项式 $x^n - ax^{n-1}$ 的根，即 $a, 0, 0, \cdots, 0$ 的某个顺序.

注 这一解法不需要利用条件中的 x_j 都是实数的假设.

8 $ABCD$ 是一个平行四边形，$AB = a$，$AD = 1$，$\angle DAB = \alpha$，且 $\triangle ABD$ 的三个角都是锐角. 证明：当且仅当 $a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ 时，四个分别以 A, B, C, D 为圆心，半径为 1 的圆 K_A，K_B，K_C，K_D 才能覆盖此平行四边形.

证明 当且仅当对平行四边形中的每个点 X，线段 XA，XB，XC，XD 中的某条线段的长度不超过 1 时，圆 K_A, K_B, K_C, K_D 才能覆盖平行四边形.

设 O 和 r 是 $\triangle ABD$ 外接圆的圆心和半径. 对 $\triangle ABD$ 内的每个点 X 都有 $XA \leqslant r$ 或 $XB \leqslant r$ 或 $XD \leqslant r$ 成立，类似地，对 $\triangle BCD$ 内的每个点 X 都有 $XB \leqslant r$ 或 $XC \leqslant r$ 或 $XD \leqslant r$ 成立. 因此当且

仅当 $r \leqslant 1$ 时，圆 K_A, K_B, K_C, K_D 能覆盖 $\square ABCD$. 这等价于 $\angle ABD \geqslant 30°$. 最后这个式子又等价于 $a = AB = 2r\sin\angle ADB \leqslant 2\sin(\alpha + 30°) = \sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$.

9 给定圆 k 及其直径 AB. 某三角形的一个顶点在 AB 上，另两个顶点在圆 k 上，求此三角形内接圆圆心的轨迹.

解 任何那种三角形的内心都位于圆 k 的内部. 我们将说明圆 k 内部的每个点 S 都是某个那种三角形的内心. 如果 S 位于线段 AB 上，那么它显然是内接于 k 的等腰三角形的内心，因而 AB 是一个对称轴. 现在设 S 不在 AB 上. 设 X 和 Y 分别是 AS 和 BS 与 k 的交点，Z 是从 S 向 AB 所引垂线的垂足. 由于四边形 $BZSX$ 是圆内接四边形，因此我们有 $\angle ZXS = \angle ABS = \angle SXY$，类似的有 $\angle ZYS = \angle SYX$，这蕴含着 S 是 $\triangle XYZ$ 的内心.

10 正方形 $ABCD$ 可以被分解为 n 个(互不重叠)的锐角三角形，求出使此问题有解的最小整数 n 并对这个 n 构造出至少一个解. 是否可对此问题附加一个条件使得所作的三角形中至少有一个的周长可以小于任意给定的正数?

解 设 n 是三角形的数目，b 和 i 分别是正方形边界上和内部的三角形的顶点数.

由于所有的三角形都是锐角三角形，故正方形的每个顶点至少属于两个三角形，此外每个边界上的顶点至少属于 3 个三角形，而每个内部的顶点至少属于 5 个三角形. 因此

$$3n \geqslant 8 + 3b + 5i \qquad ①$$

由于任何在正方形内部的，边界处的和顶点处的三角形的角的角度之和分别等于 $2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}$，而三角形的所有角的角度之和等于 $n\pi$，由此就得出

$$n\pi = 4 \times \frac{\pi}{2} + b\pi + 2i\pi$$

即

$$n = 2 + b + 2i$$

这个式子和式 ① 一起就得出 $i \geqslant 2$. 由于正方形内部的每个顶点至少属于 5 个三角形，且至多有两个三角形包含两个正方形的顶点. 这就得出 $n \geqslant 8$.

图 1 表明正方形可以被分解成八个锐角三角形. 显然，其中有一个三角形的周长可以任意小.

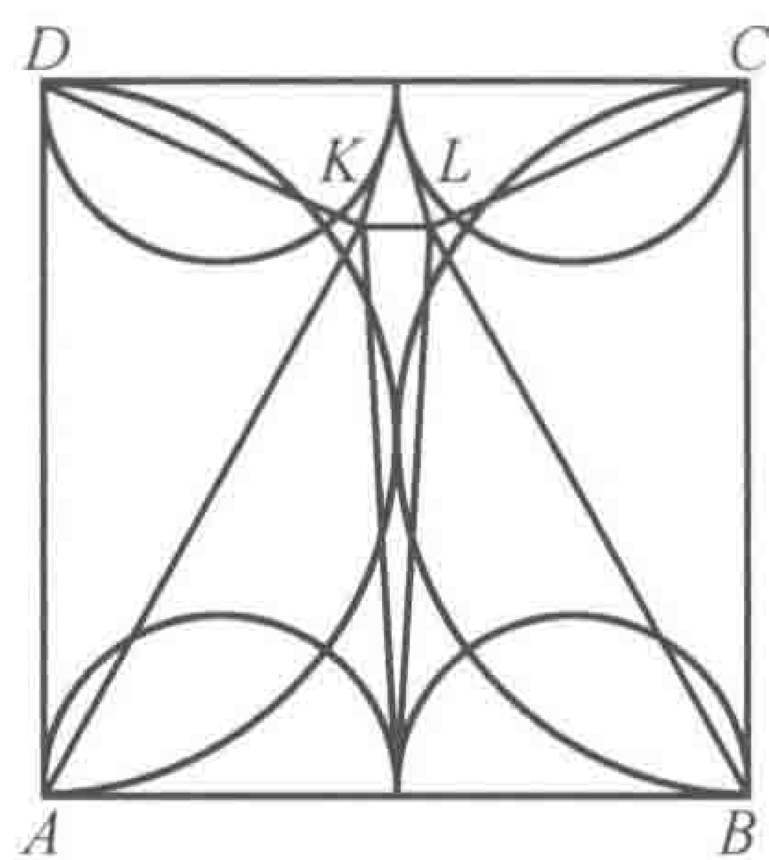


图 1

11 设 n 是一个正整数，求出边长小于或等于 n 的互不全等的三角形的最大数.

解 我们必须求出满足关系 $a \leqslant b \leqslant c \leqslant n$ 和 $a+b>c$ 的正整数(a,b,c)的三元组的数目 p_n. 我们用 $p_n(k)$ 表示使 $c=k$，$k=1,2,\cdots,n$ 的那种三元组的个数. 对偶数 k

$$p_n(k)=k+(k-2)+(k-4)+\cdots+2=\frac{k^2+2k}{4}$$

而对奇数 k，$p_n(k)=\frac{k^2+2k+1}{4}$. 因此

$$p_n=p_n(1)+p_n(2)+\cdots+p_n(n)=\begin{cases}\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}, & 2\mid n\\ \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24}, & 2\nmid n\end{cases}$$

12 给了一个长度为 1 的线段 AB，用以下方式定义一个集合 M，M 包含 A，B 两点和所有按下述法则递推而得的点：对集合 M 中的任意一对点 X，Y，M 也包含线段 XY 上使 $YZ=3XZ$ 的点.

(1) 证明：集合 M 由线段 AB 上所有那种点 X 组成，X 到 A 的距离是

$$AX=\frac{3k}{4^n} \text{ 或 } AX=\frac{3k-2}{4^n}$$

其中 n，k 是非负整数；

(2) 证明：使 $AX_0=\frac{1}{2}X_0B$ 的点 X_0 不属于集合 M.

证明 用 M_n 表示线段 AB 上从 A 和 B 通过不多于 n 次的迭代所得的点集. 可以用归纳法证明

$$M_n=\left\{X\in AB \mid AX=\frac{3k}{4^n} \text{ 或 } \frac{3k-2}{4^n}, k\in \mathbf{N}\right\}$$

因而立即可以从 $M=\bigcup M_n$ 得出(1). 从上式也可得出如果 $a,b\in \mathbf{N}$ 并且 $\frac{a}{b}\in M$，则 $3\mid a(b-a)$，因而得出(2)，即 $\frac{1}{2}\notin M$.

13 是否在所有内部有一个内接的半径为 r 的半圆的四边形中存在面积最大者，如果有，确定其形状和面积。

解 最大面积为 $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$(其中 r 是半圆的半径). 实现这一情

况的四边形是一个梯形,其两个顶点是半圆的直径的端点,另两个顶点把半圆分成三段相等的弧.

14 在所有形如$\frac{p}{q}$的分数中,哪个分数最接近$\sqrt{2}$?其中 p,q 都是小于 100 的正整数.求出这个分数化为小数后小数点后所有与$\sqrt{2}$的小数表示中重合的数字(不得使用任何数表,计算机,计算器).

解法 1 由于 $|p^2-2q^2|>1$ 我们有

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right|=\frac{|p-q\sqrt{2}|}{q}=\frac{|p^2-2q^2|}{q(p+q\sqrt{2})}\geqslant\frac{1}{q(p+q\sqrt{2})} \quad ①$$

使得 $p,q\leqslant 100$ 的方程 $|p^2-2q^2|=1$ 的最大解是 $(p,q)=(99,70)$.利用式 ① 容易验证当 $p,q\leqslant 100$ 时,$\frac{99}{70}$ 是$\frac{p}{q}$中最接近$\sqrt{2}$的分数.

解法 2 利用法雷分数的基本性质我们可以求出$\frac{41}{29}<\frac{p}{q}<\frac{99}{70}$蕴含 $p\geqslant 41+99>100$.由于 $99\times 29-41\times 70=1$,因此后者更接近$\sqrt{2}$.

15 设 $\tan\alpha=\frac{p}{q}$,其中 p,q 都是整数且 $q\neq 0$.证明:当且仅当 p^2+q^2 是一个整数的平方时,满足 $\tan 2\beta=\tan 3\alpha$ 的 β 才能使 $\tan\beta$ 是一个有理数.

证明 给定 $\tan\alpha\in\mathbf{Q}$,我们有当且仅当 $\tan\gamma\in\mathbf{Q}$ 时,$\tan\beta$ 是有理数,其中 $\gamma=\beta-\alpha$ 且 $2\gamma=\alpha$.设 $t=\tan\gamma$,我们得出$\frac{p}{q}=\tan 2\gamma=\frac{2t}{1-t^2}$,这引出二次方程 $pt^2+2qt-p=0$,当且仅当 $4(p^2+q^2)$ 是完全平方数时,此方程有有理数解,这就证明了所要的结果.

16 证明以下命题:如果 r_1 和 r_2 是相除时商是无理数的实数,那么任意实数 x 可以被形如 $z_{k_1,k_2}=k_1r_1+k_2r_2$ 的数逼近到任意程度,其中 k_1,k_2 是整数,这就是说,对任意实数 x 和任意正实数 p 都可以求出两个整数 k_1,k_2,使得 $|x-(k_1r_1+k_2r_2)|<p$.

证明 首先我们注意由于$\frac{r_1}{r_2}$是无理数，故所有的数$z_{m_1,m_2}=m_1r_1+m_2r_2, m_1, m_2\in\mathbf{Z}$都是不同的. 那样，对任意$n\in\mathbf{N}$，区间$[-n(|r_1|+|r_2|), n(|r_1|+|r_2|)]$包含$(2n+1)^2$个数$z_{m_1,m_2}$，其中$|m_1|, |m_2|\leqslant n$. 因此这$(2n+1)^2$个数中的某两个数，比如说$z_{m_1,m_2}, z_{n_1,n_2}$的差的绝对值至多为$\frac{2n(|r_1|+|r_2|)}{(2n+1)^2-1}=\frac{|r_1|+|r_2|}{2(n+1)}$. 取$n$足够大，可使

$$z_{q_1,q_2}=|z_{m_1,m_2}-z_{n_1,n_2}|\leqslant p$$

现在，如果k是使得$kz_{q_1,q_2}\leqslant x\leqslant(k+1)z_{q_1,q_2}$的整数，那么$kz_{q_1,q_2}$和$x$的偏差至多是$p$，这就是所需要证明的.

17 设k, m和n都是正整数，它们使$m+k+1$是一个大于$n+1$的素数. 用c_s表示$s(s+1)$. 证明：乘积$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)$可被乘积$c_1c_2\cdots c_n$整除.

证明 利用$c_r-c_s=(r-s)(r+s+1)$我们易于得出

$$\frac{(c_{m+1}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)}{c_1c_2\cdots c_n}=$$

$$\frac{(m-k+n)!}{(m-k)!\ n!}\cdot\frac{(m+k+n+1)!}{(m+k+1)!\ (n+1)!}$$

第一个因子$\frac{(m-k+n)!}{(m-k)!\ n!}=\binom{m-k+n}{n}$显然是一个整数. 由假设可知，$m+k+1$和$(m+k)!\ (n+1)!$互素，而$(m+k+n+1)!$可被这两个数整除，因此也可被它们之积整除，因此第二个因子也是整数. 这就证明了结论.

18 如果x是一个正有理数.

(1) 证明：x可唯一地表示成

$$x=a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots$$

的形式，其中$a_1, a_2, \cdots$都是当$n>1$时使得$0\leqslant a_n\leqslant n-1$的非负整数，且此级数的和是有限的.

(2) 证明：x可以表示成不同整数的倒数之和，其中每个整数都大于10^6.

证明 (1) 只需证明每个形如$\frac{m}{n!}, m, n\in\mathbf{N}$的有理数都可唯一地写成所需的形式即可. 我们对$n$应用数学归纳法以证明这一论断.

对 $n=1$,命题是显然的.现在假设命题对 $n-1$ 成立,并设给了有理数$\frac{m}{n!}$.我们取 $a_n\in\{0,\cdots,n-1\}$ 使得对某个 $m_1\in\mathbf{N}$,$m-a_n=nm_1$.由归纳法假设,有唯一的 $a_1\in\mathbf{N}$,$a_i\in\{0,\cdots,i-1\}$,$\{i=1,\cdots,n-1\}$ 使得$\frac{m_1}{(n-1)!}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{i!}$,因此

$$\frac{m}{n!}=\frac{m_1}{(n-1)!}+\frac{a_n}{n!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i!}$$

如果$\frac{m}{n!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i!}$,用 $n!$ 去乘,我们看出 $m-a_n$ 必须是 n 的倍数,因此 a_n 的选法是唯一的,因而表达式本身也是唯一的.这就完成了归纳法的证明.

特别,由于 $a_i\mid i!$ 以及$\frac{i!}{a_i}>(i-1)!\geqslant\frac{(i-1)!}{a_{i-1}}$,我们就得出,每个有理数 q,$0<q<1$ 都可写成不同的整数的倒数之和的形式.

(2) 设 $x>0$ 是一个有理数.对任意整数 $m>10^6$,设 $n>m$ 是使 $y=x-\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}-\cdots-\frac{1}{n}$ 的最大整数,那么 y 可以写成不同的正整数的倒数之和的形式.这些整数必大于 n,由此立即可以得出结论.

19 n 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 位于半径为 1 的圆内或圆周上,使得这些点中任意两点距离的最小值 d_n 是一个尽可能大的正数 D_n.对 $n=2$ 至 7 计算 D_n,并验证你的结论.

解 假设 $n\leqslant 6$.我们用半径把圆盘分解成 n 个全等的区域,因此 P_j 之一将位于这些区域中的某两个的边界上.那么这些区域之一将包含 n 个给定点中的两个点.由于这些区域的直径是 $2\sin\frac{\pi}{n}$,因此我们有 $d_n\leqslant 2\sin\frac{\pi}{n}$.当 P_i 是圆的内接正 n 边形的顶点时,这个值可以达到.因此 $D_n\leqslant 2\sin\frac{\pi}{n}$.

对 $n=7$,我们有 $D_7\leqslant D_6=1$,当其中 6 个点是圆内接正六边形的顶点,而第 7 个点位于圆心时,这个值可以达到.因此 $D_7=1$.

20 在空间中给出了 $n(n \geqslant 3)$ 个点，其中每一对点确定了某个距离. 假设所有的距离都不同. 把每个点都与距离它最近的点联结起来. 证明用此方法不可能得出一个多边形.

解 命题的叙述是错误的. 在多边形是封闭的附加假设下，命题将显然成立. 然而，从所提供的不确切的解答看来，问题提出者并未意识到这点.

21 不使用任何数表，求出以下乘积的精确值

$$P=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$

解 用简单的数学归纳法可证公式

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cdots\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}$$

利用此公式得出

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{16}$$

$$\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}=\frac{1}{4},\cos\frac{5\pi}{15}=\frac{1}{2}$$

将以上各式相乘即得所求的乘积 $P=\frac{1}{128}$.

22 两个半径为 r 的圆 k_1 和 k_2 的圆心之间的距离为 r. 两个点 A 和 B 在圆 k_1 上处于关于圆心对称的位置. 点 P 是圆 k_2 上任意一点. 求不等式

$$PA^2+PB^2\geqslant 2r^2$$

等号何时成立?

解 设 O_1 和 O_2 是圆 k_1 和 k_2 的圆心，C 是 AB 的中点. 利用熟知的三角形中各元素之间的关系得出

$$PA^2+PB^2=2PC^2+2CA^2\geqslant 2O_1C^2+2CA^2=2O_1A^2=2r^2$$

等号在点 P 与 O_1 重合或点 A 和 B 都与 O_2 重合时成立.

23 对平面上任意两个向量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$，证明：当且仅当 $a\geqslant 0$，$c\geqslant 0,4ac\geqslant b^2$ 时，不等式

$$a\boldsymbol{f}^2+b\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}+c\boldsymbol{g}^2\geqslant 0$$

成立.

证明 设 $a\geqslant 0,c\geqslant 0,4ac\geqslant b^2$. 如果 $a=0$，那么 $b=0$，而不

等式归结为显然的 $c\boldsymbol{g}^2\geqslant 0$. 如果 $a>0$,那么

$$af^2+b\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}+c\boldsymbol{g}^2=a\left(\boldsymbol{f}+\frac{b}{2a}\boldsymbol{g}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\boldsymbol{g}^2\geqslant 0$$

现在设对任意向量 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 成立 $a\boldsymbol{f}^2+b\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}+c\boldsymbol{g}^2\geqslant 0$. 用 $t\boldsymbol{g}(t\in\mathbf{R})$ 代替 $\boldsymbol{f}$ 我们得出对任意实数 t 成立 $(at^2+bt+c)\boldsymbol{g}^2\geqslant 0$,因此 $a\geqslant 0, c\geqslant 0, 4ac\geqslant b^2$.

24 父亲留给他的孩子们一些金币. 根据他的遗嘱,最大的孩子得到一个金币以及余下金币的七分之一,第二个孩子得到两个金币以及余下金币的七分之一,第三个孩子得到三个金币以及余下金币的七分之一,以此类推,直到最小的孩子. 如果每个孩子都继承了整数个金币,求出孩子的数目和金币的数目.

在竞赛时,本题的叙述改为如下形式:

某次运动会相继开了 $n(n>1)$ 天,共发出奖牌 m 枚. 第一天发出奖牌一枚又余下 $m-1$ 枚的 $\frac{1}{7}$,第二天发出两枚又余下的 $\frac{1}{7}$,依此类推,最后在第 n 天发出 n 枚而没有剩下奖牌. 问这次运动会共开了几天? 共发了几枚奖牌?

解 设第 k 个孩子得到 x_k 个金币,根据问题的条件可知,在他得到金币后,还剩余 $6(x_k-k)$ 个金币,这就给出递推关系

$$x_{k+1}=k+1+\frac{6(x_k-k)-k-1}{7}=\frac{6}{7}x_k+\frac{6}{7}$$

上式与 $x_1=1+\frac{m-1}{7}$ 一起就得出

$$x_k=\frac{6^{k-1}}{7^k}(m-36)+6, 1\leqslant k\leqslant n$$

由于我们已知 $x_n=n$,于是就得出 $6^{n-1}(m-36)=7^n(n-6)$,由此可知 $6^{n-1}\mid(n-6)$,这只可能对 $n=6$ 成立,因此 $n=6, m=36$.

25 三个直径为 d 的圆都与它们中心的一个球相切,此外,每个圆与其他两个圆相切. 如何选择中心处球的半径 R 才能使整个图形的对称轴和联结球心与圆上距离此轴最远的点之间的连线构成一个60°的角(整个图形的对称轴具有把图形旋转120°后和最初的图形重合的性质. 三个圆都位于通过球心和垂直于图形对称轴的平面的一侧).

解 答案是 $R=\frac{(4+\sqrt{3})d}{6}$.

26 设 $ABCD$ 是一个正四面体. 对一条棱,例如棱 CD 上的任意一点 M,定义一个点 $P=P(M)$ 与它对应,点 P 是从点 A 所引的垂直于 BM 的直线和从点 B 所引的垂直于 AM 的直线的交点. 当点 M 变动时,点 P 的轨迹是什么?

解 设L是棱AB的中点，由于点P在$\triangle ABM$上且ML是这个三角形的高，因此P在ML上，因而属于不规则区域LCD. 此外，由于$\triangle ALP$和$\triangle MLB$相似，因此我们有$LP \cdot LM = LA \cdot LB = \frac{a^2}{4}$，其中$a$是正四面体$ABCD$的边长. 这就易于得出点$P$的轨迹是在平面$LCD$上线段$CD$在关于圆心为$L$，半径为$\frac{a}{2}$的圆的反演下的像. 而这个像是中心在$L$而端点在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的垂心处的圆弧.

27 用一个平面去截一个立方体，可以得到（以及如何得到）什么样的正多边形？

解 如图2所示，用一个平面去截一个立方体可以得到边数为3，4和6的正多边形. 由于一个立方体只有6个面，因此用这种方法不可能得到边数多于6的多边形. 同时，如果用一个平面去截一个立方体得到的是一个五边形，那么它的位于相对面上的边是平行的，因此不可能是正五边形.

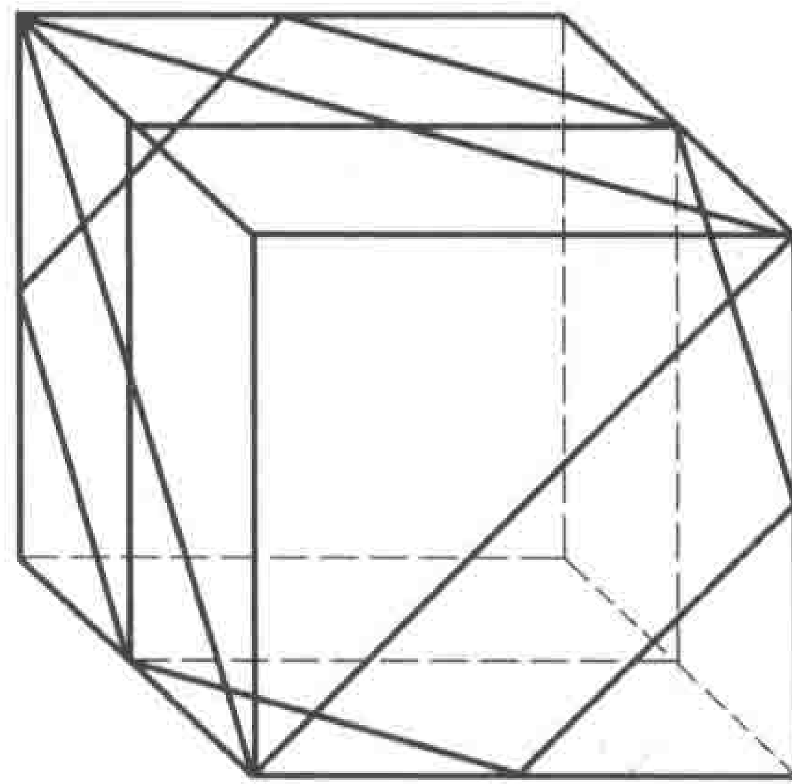


图2

28 求出使表达式

$$y=\frac{\tan(x-u)+\tan x+\tan(x+u)}{\tan(x-u)\tan x\tan(x+u)}$$

不依赖于x的参数u.

解 所给的表达式可以变换为

$$y=\frac{4\cos 2u+2}{\cos 2u-\cos 2x}-3$$

它当且仅当$\cos 2u=-\frac{1}{2}$，即对某个$k\in\mathbf{Z}$，$u=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$时不依赖于x.

29 $\triangle A_0B_0C_0$和$\triangle A'B'C'$都是锐角三角形. 描述如何作一个相似于$\triangle A'B'C'$并外接于$\triangle A_0B_0C_0$的$\triangle ABC$（点A，B，C对应于点A'，B'，C'，并且边AB通过点C_0，BC通过点A_0，而边CA通过点B_0）. 描述并证明如何使得$\triangle ABC$的面积最大.

解 设弧l_a是在B_0C_0的与A_0相反的一侧使得$\angle B_0AC_0=\angle A'$的点A的轨迹. k_a是包含l_a的圆，S_a是k_a的圆心. 类似的，定义l_b，l_c，k_b，k_c，S_b，S_c. 容易证明圆k_a，k_b，k_c在$\triangle ABC$内有公共点S（设k_a与k_b交于S（由于这两个圆都过点B_0，且圆心分别在B_0C_0和A_0B_0的外侧，因此它们在$\triangle A_0B_0C_0$内必有交点），由于S，B_0，

C_0，A_1 四点共圆，S，A_0，B_0，C_1 四点共圆，所以 $\angle B_0SC_0=180°-\angle A'$，$\angle B_0SA_0=180°-\angle C'$，因此

$$\angle A_0SC_0=360°-(180°-\angle A')-(180°-\angle C')=\angle A'+\angle C'=180°-\angle B'$$

这说明 S，A_0，C_0，B_1 四点共圆，即点 S 在圆 k_c 上，这就证明了 S 是圆 k_a，k_b，k_c 的公共点)．再设 A_1，B_1，C_1 分别是 S 在弧 l_a，l_b，l_c 上关于 S_a，S_b，S_c 的对应点．那么由于 $\angle B_1A_0S=\angle C_1A_0S=90°$，故 $A_0\in B_1C_1$，类似的，$B_0\in A_1C_1$，$C_0\in A_1B_1$．因此 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 外接三角形并且相似于 $\triangle A'B'C'$．

此外，我们断言 $\triangle A_1B_1C_1$ 就是使得边 BC 最大的三角形，因此面积最大的是 $\triangle ABC$．实际上如果 $\triangle ABC$ 是具有此性质的任何其他三角形，而 S'_b，S'_c 是 S_b，S_c 在 BC 上的投影，则有

$$BC=2S'_bS'_c\leqslant 2S_bS_c=B_1C_1$$

这证明了 B_1C_1 的最大性．

30 给出 $m+n$ 个数 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$，$b_j(j=1,2,\cdots,n)$，确定使 $|i-j|\geqslant k$ 的数对 (a_i,b_j) 的对数，其中 k 是一个非负整数．

解 不失一般性，可设 $m\leqslant n$．设 r 和 s 分别是使 $i-j\geqslant k$ 和 $j-i\geqslant k$ 的数对的数目，那么所求的数就是 $r+s$．我们易求出

$$r=\begin{cases}\dfrac{(m-k)(m-k+1)}{2}, & k<m\\ 0, & k\geqslant m\end{cases}$$

$$s=\begin{cases}\dfrac{m(2n-2k-m+1)}{2}, & k<n-m\\ \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}, & n-m\leqslant k<n\\ 0, & k\geqslant n\end{cases}$$

31 一个盒子里装有 k 个颜色不同的球．设有 n_i 个球具有第 i 种颜色．从盒子里每次拿一个，随机地往外取球．取出的球不再放回．问为了抽到 m 个相同颜色的球，最少需要取多少次？

解 假设 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k$．如果 $n_k<m$，那么问题无解．在相反的情况下，解为 $1+(m-1)(k-s+1)+\sum\limits_{i<s}n_i$，其中 s 是使 $m\leqslant n_i$ 的最小的 i．

32 确定用一个顶点在球心的三个二面角分别为 α,β,γ 的三面角去截一个半径为 R 的球所得的立体的体积.

解 如图 3,用 V 表示所说的立体的体积,并用 V_a,V_b,V_c 表示所给的球在所给的二面角内的体积. 那么 $V_a=\frac{2R^3\alpha}{3}$,$V_b=\frac{2R^3\beta}{3}$,$V_c=\frac{2R^3\gamma}{3}$,容易看出 $2(V_a+V_b+V_c)=4V+\frac{4\pi R^3}{3}$,由此得出

$$V=\frac{1}{3}R^3(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

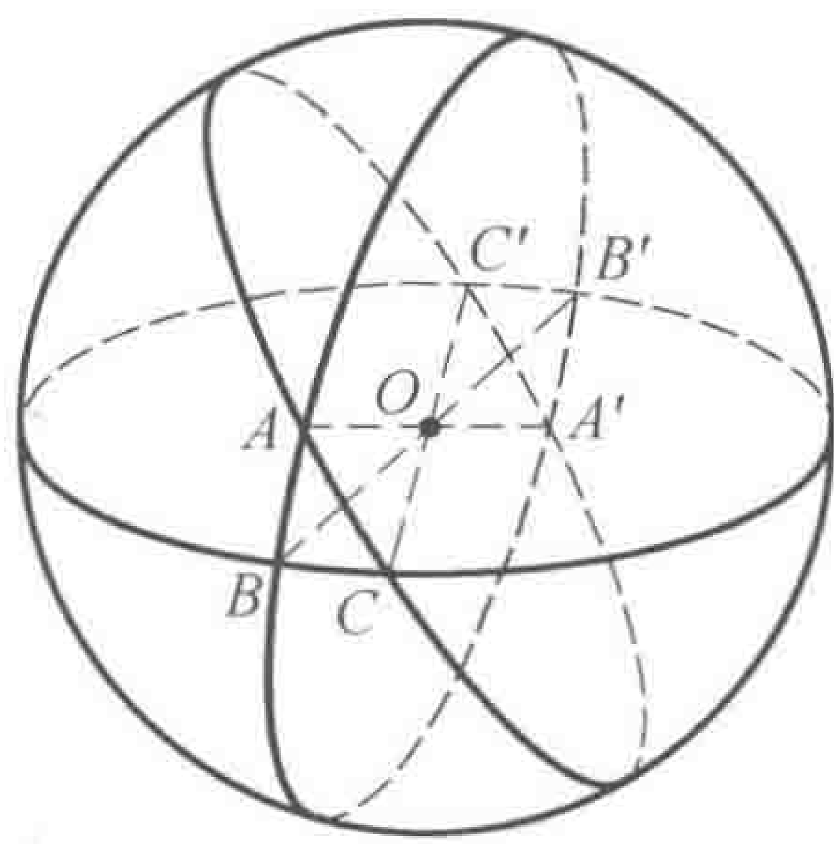


图 3

33 在什么情况下,方程组

$$\begin{cases}x+y+mz=a\\x+my+z=b\\mx+y+z=c\end{cases}$$

有解? 求出上述方程组有唯一的构成一个等差数列的解的条件.

解 如果 $m\notin\{-2,1\}$,方程组有唯一的解

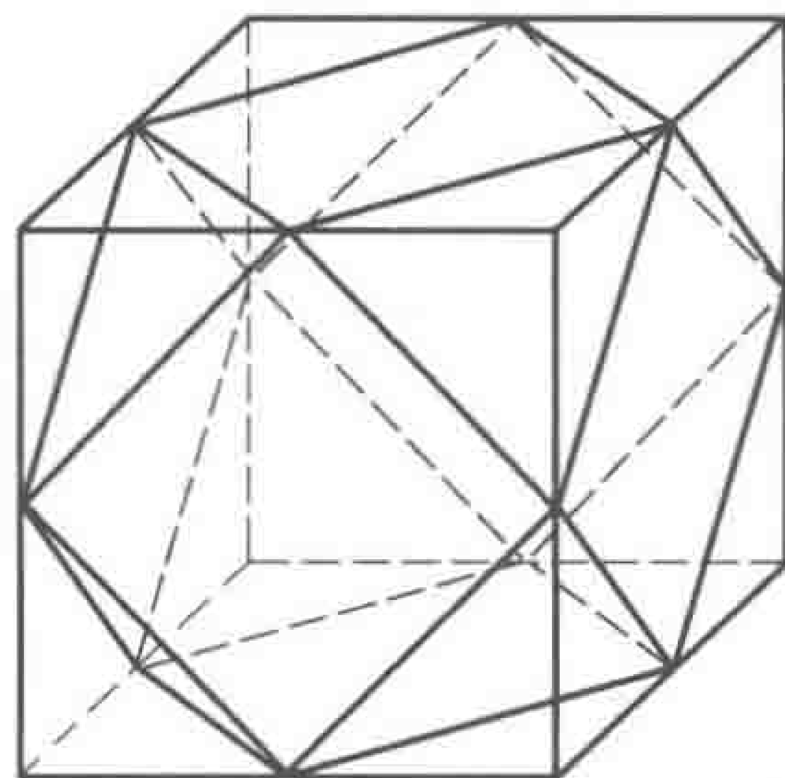
$$x=\frac{b+a-(1+m)c}{(2+m)(1-m)},y=\frac{a+c-(1+m)b}{(2+m)(1-m)},z=\frac{b+c-(1+m)a}{(2+m)(1-m)}$$

当且仅当 a,b,c 构成等差数列时,数 x,y,z 也构成等差数列.

对 $m=1$,方程组当且仅当 $a=b=c$ 时有解,而对 $m=-2$,方程组当且仅当 $a+b+c=0$ 时有解,在这两种情况下,方程组都有无限多组解.

34 凸多面体的表面由六个正方形和八个等边三角形组成. 它的每条棱是一个三角形和一个正方形的公共边. 所有的由三角形和正方形构成的二面角都相等. 证明这个多面体可以有一个外接球并计算多面体的体积和外接球的体积的比的平方.

证明 多面体的每个顶点恰是两个正方形和两个三角形的顶点(不可能多于两个,否则在此顶点处的角度之和将超过360°). 利用三面角都相等的条件易看出该多面体由它的边长唯一确定.


图 4

如图 4 所示,把立方体的顶点"砍掉"后所得的多面体满足所给的条件.

现在,易于算出多面体的体积和其外接球体积的比的平方等

于$\frac{25}{8\pi^2}$.

35 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[1+2^k\frac{1}{\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^k}\right]=\sec^{2n}\frac{x}{2}+\sec^n x$$

证明 原等式左边的和式可以重新写成

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right)^k$$

由于$\frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\cos x}$,因此上面的和式可以利用二项展开公式化成

$$\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)^n+\left(1+\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)=\sec^{2n}\frac{x}{2}+\sec^n x$$

36 证明:当且仅当 $AB=CD$,$AC=BD$ 和 $AD=BC$ 时,四面体 $ABCD$ 的外接球心和内切球心重合.

证明 如图 5,设四面体 $ABCD$ 的斜棱都相等.设 K,L,M,P,Q,R 分别是棱 AB,AC,AD,CD,DB,BC 的中点.线段 KP,LQ,MR 有公共点 T.我们断言 KP,LQ,MR 都是四面体 $ABCD$ 的对称轴.从 $LM\parallel CD\parallel RQ$,$LR\parallel MQ$ 以及 $LM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=LR$,得出 $LMRQ$ 是一个菱形,因而 $LQ\perp MR$.类似可证 KP 垂直于 LQ 和 MR,因而 KP 垂直于平面 $LMQR$.由于 AB 和 CD 都平行于平面 $LMQR$,因此它们都垂直于 KP.因此点 A,C 和 B,D 分别对称于直线 KP,这说明 KP 是四面体 $ABCD$ 的对称轴.类似可证,LQ 和 MR 也是四面体 $ABCD$ 的对称轴.

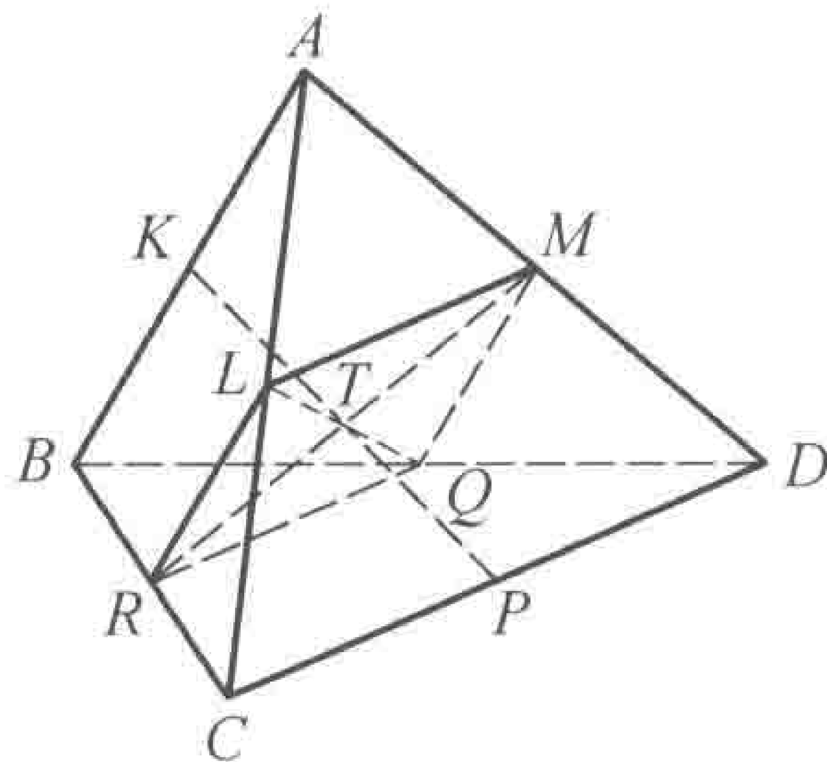


图 5

由于四面体 $ABCD$ 的外接球心和内切球心都必须位于对称轴上,因此这两个球心都与点 T 重合.

反过来,设四面体 $ABCD$ 的外接球心和内切球心重合于某个点 T,那么 T 在面 ABC 和 ABD 上的正投影分别是这两个三角形的外接圆心 O_1 和 O_2,此外由于 $TO_1=TO_2$,因此由勾股定理可知 $AO_1=AO_2$,由正弦定理即得 $\angle ACB=\angle ADB$.现在易于得出四面体的一个顶点处角度之和等于$180°$.设 D',D'' 和 D''' 是平面

ABC 上在 $\triangle ABC$ 外使得 $\triangle D'BC \cong \triangle DBC$，$\triangle D''CA \cong \triangle DCA$，$\triangle D'''AB \cong \triangle DAB$ 的点，那么 $\angle D''AD'''$ 是平角，因此 A,B,C 分别是线段 $D''D'''$，$D'''D'$，$D'D''$ 的中点. 因此 $AD=\dfrac{D''D'''}{2}=BC$，类似的，$AB=CD$，$AC=BD$.

37 证明：对任意正数，以下不等式成立

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

证明 利用算数－几何平均不等式得(不是对右边的三项直接用，而是先将右边拆成几个单项后再用)

$$8a^2b^3c^3\leqslant 2a^8+3b^8+3c^8$$
$$8a^3b^2c^3\leqslant 3a^8+2b^8+3c^8$$
$$8a^3b^3c^2\leqslant 3a^8+3b^8+2c^8$$

把以上不等式相加，并两边除以 $a^3b^3c^3$ 即得所要证明的不等式.

38 是否存在整数，其立方等于 $3n^2+3n+7$? 其中 n 是一个整数.

解 假设存在整数 n 和 m 使得 $m^3=3n^2+3n+7$. 那么由 $m^3\equiv 1\pmod 3$ 得出对某个 $k\in\mathbf{Z}$，$m=3k+1$. 把此式代入原来的等式，得 $3k(3k^2+3k+1)=n^2+n+2$. 容易验证 n^2+n+2 不可能被 3 整除. 矛盾. 所以所给的方程不可能有整数解，即不存在这样的整数.

39 证明：如果 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 满足等式

$$\frac{\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C}{\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C}=2$$

则它必是一个直角三角形.

证明 由于 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=3$，因此所给的等式等价于 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$，此式乘以 2 后可以变换为

$$\begin{aligned}0&=\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2C=\\&2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2C=\\&2\cos C(\cos(A-B)-\cos C)\end{aligned}$$

由此得出或者 $\cos C=0$ 或者 $\cos(A-B)=\cos C$ 在这两种情况下，该三角形都是直角三角形.

40 四面体恰有一条棱的长度大于 1，证明其体积必小于或等于$\frac{1}{8}$.

证明 假设 CD 是四面体 $ABCD$ 中最长的棱，$AB=a$，CK 和 DL 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的高，DM 是四面体 $ABCD$ 的高. 由于 CK 是直角三角形的直角边，这个直角三角形（$\triangle AKC$ 或 $\triangle BKC$）的另一条直角边不小于$\frac{a}{2}$，而其斜边不大于 1，故 $CK^2\leqslant 1-\frac{a^2}{4}$. 类似地，我们可以证明 $DL^2\leqslant 1-\frac{a^2}{4}$. 由于 $DM\leqslant DL$，因此 $DM^2\leqslant 1-\frac{a^2}{4}$. 这就得出

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}CK\right)DM\leqslant\frac{1}{6}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{1}{24}a(2-a)(2+a)=$$
$$\frac{1}{24}[1-(a-1)^2](2+a)\leqslant\frac{1}{24}\times 1\times 3=\frac{1}{8}$$

41 通过锐角 $\triangle ABC$ 的垂心 H 任意画一条直线 l. 证明：l 关于边 BC，CA，AB 的对称像 l_a，l_b，l_c 必交于一点，且这个点位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

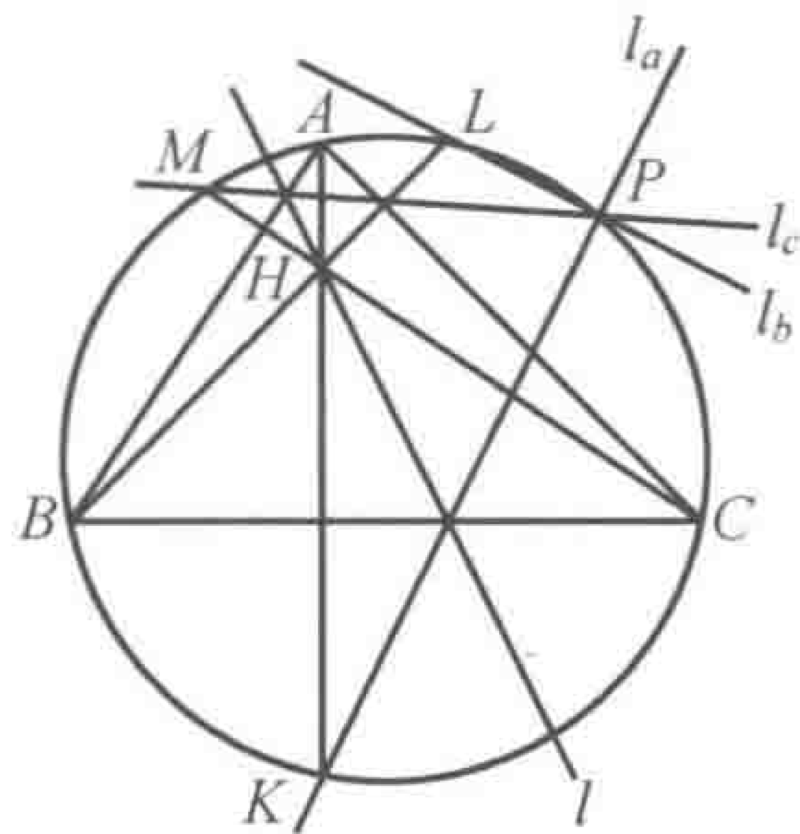


图 6

证明 如图 6，众所周知点 H 关于 BC，CA，AB 的对称点 K，L，M 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆 k 上. 对点 K，这可以从对 $\triangle HBC$ 的角度的初等计算以及 $\angle KBC=\angle HBC=\angle KAC$ 得出. 对其他两点，证明是类似的. 由于直线 l_a，l_b 分别通过点 K 和 L，且 l_b 是由 l_a 围绕点 C 旋转角度 $2\gamma=\angle LCK$ 而得，由此得出点 P 和 l_a 与 l_b 的交点均在 $\triangle KLC$ 的外接圆上，即 k 上. 类似的，l_b 和 l_c 也相交于 k 上一点. 因此，它们都必须通过一个相同的点 P.

42 把表达式 $1-\sin^5 x-\cos^5 x$ 分解成实因式.

解 设原表达式 $1-\sin^5 x-\cos^5 x=E$，则

$$E=(1-\sin x)(1-\cos x)[3+2(\sin x+\cos x)+$$
$$2\sin x\cos x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)]$$

43 给定方程

$$x^5+5\lambda x^4-x^3+(\lambda\alpha-4)x^2-(8\lambda+3)x+\lambda\alpha-2=0$$

(1) 确定 α 使得所给的方程恰有一个不依赖于 λ 的根；

(2) 确定 α 使得所给的方程恰有两个不依赖于 λ 的根.

解 我们可以把所给的方程写成

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2+\lambda(5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha)=0$$

这个方程有一个不依赖于 λ 的根的充要条件是这个根是方程

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0 \text{ 和 } 5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha=0$$

的公共根.

上面第一个方程等价于$(x-2)(x^2+x+1)^2=0$,他有三个根 $x_1=2, x_2=x_3=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

(1) 对 $\alpha=-\dfrac{64}{5}$, $x_1=2$ 是唯一不依赖于 λ 的根;

(2) 对 $\alpha=-3$,有两个不依赖于 λ 的根:$x_1=\omega$ 和 $x_2=\omega^2$.

44 设 p 和 q 是两个不同的正整数,而 x 是一个实数. 构成乘积$(x+p)(x+q)$.

(1) 求和 $S(x,n)=\sum(x+p)(x+q)$,其中 p 和 q 从 1 到 n 取值;

(2) 是否存在整数值 x,使 $S(x,n)=0$?

解 (1)$S(x,n)=n(n-1)\left[x^2+(n+1)x+\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}\right]$;

(2) 易看出方程 $S(x,n)=0$ 有两个根,$x_1=x_2=\dfrac{-(n+1)\pm\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}}{2}$,当且仅当对某个 $k\in\mathbf{N}$, $n=3k^2-1$ 时,这两个根才是整数.

45 (1) 解方程

$$\sin^3 x+\sin^3\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\sin^3\left(\frac{4\pi}{3}+x\right)+\frac{3}{4}\cos 2x=0$$

(2) 设解以三角圆的弧 AB 的形式给出(其中 A 是三角圆的弧的起点)而 P 是一个内接于三角圆的一个顶点 A 处的正多边形.

① 求出以在正十二边形顶点处为端点 B 的弧的子集.

② 证明:端点 B 不可能在 P 的顶点处,如果 $2,3\nmid n$ 或 n 是一个素数.

解 (1) 利用公式 $4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$ 易于把所给的方程化为 $\sin 3x=\cos 2x$,它的解由 $x=\dfrac{(4k+1)\pi}{10}$, $k\in\mathbf{Z}$ 给出.

(2)① 对应于解 $x=\frac{(4k+1)\pi}{10}$ 的点 B 是一个正十二边形的顶点的充分必要条件是 $\frac{(4k+1)\pi}{10}=\frac{2m\pi}{12}$,即对某个 $m\in\mathbf{Z}$,$3(4k+1)=5m$,这只有当 $5\mid 4k+1$ 即 $k\equiv 1\pmod 5$ 时才可能.

② 类似于 ①,如果对应于解 $x=\frac{(4k+1)\pi}{10}$ 的点 B 是一个多边形 P 的顶点.那么对某个 $m\in\mathbf{Z}$,$(4k+1)n=20m$,这蕴含 $4\mid n$.

46 如果 x,y,z 是满足关系

$$x+y+z=1 \text{ 和 } \arctan x+\arctan y+\arctan z=\frac{\pi}{4}$$

的实数.证明:对所有的正整数 n

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=1$$

证明 设 $\arctan x=a$,$\arctan y=b$,$\arctan z=c$,那么 $\tan(a+b)=\frac{x+y}{1-xy}$,而

$$\tan(a+b+c)=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=1$$

这蕴含

$$(x-1)(y-1)(z-1)=$$
$$xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1=0$$

由此得出 x,y,z 之一等于 1,比如说 $z=1$,因此 $x+y=0$,所以

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=x^{2n+1}+(-x)^{2n+1}+1^{2n+1}=1$$

47 证明不等式

$$x_1x_2\cdots x_k(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1})\leqslant$$
$$x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1}$$

其中 $x_i>0(i=1,2,\cdots,k)$,$k\in\mathbf{N}$,$n\in\mathbf{N}$.

证明 利用算数 — 几何平均不等式,得出

$$(n+k-1)x_1^nx_2\cdots x_k\leqslant nx_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1}$$
$$(n+k-1)x_1x_2^n\cdots x_k\leqslant nx_1^{n+k-1}+nx_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1}$$
$$\vdots$$
$$(n+k-1)x_1x_2\cdots x_k^n\leqslant x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+nx_k^{n+k-1}$$

把这些不等式相加并除以 $n+k-1$ 即得到所要的不等式.

注 这个不等式也可从 Muirhead 不等式立即得出(关于 Muirhead 不等式可参看 G. H. Hardy,J. E. Littlewood,G. Pólya 著的《不等式》一书,有越民义先生翻译的中译本).

48 确定方程 $x^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的所有正根.

解 令 $f(x)=x\ln x$，那么所给的方程等价于 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，它有解 $x_1=\frac{1}{2}$ 和 $x_2=\frac{1}{4}$. 由于函数 f 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上是递减的而在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上是递增的，因此这个方程没有其他的解.

49 设 n 和 k 是使 $1\leqslant n\leqslant N+1$，$1\leqslant k\leqslant N+1$ 的正整数. 证明

$$\min_{n\neq k}|\sin n-\sin k|<\frac{2}{N}$$

证明 由于 $\sin 1,\sin 2,\cdots,\sin(N+1)\in(-1,1)$，因此这 $N+1$ 个数中必有两个数之间的距离小于 $\frac{2}{N}$，因此对某个整数 $1\leqslant k,n\leqslant N+1,n\neq k$，$|\sin n-\sin k|<\frac{2}{N}$.

50 函数 $\varphi(x,y,z)$ 对所有的实数三元组 (x,y,z) 有定义，又存在两个对所有实数有定义的二元函数 f 和 g 使得对所有的实数 x,y,z 成立

$$\varphi(x,y,z)=f(x+y,z)=g(x,y+z)$$

证明：存在一个一元的实函数 h 使得对所有的实数 x,y,z 成立

$$\varphi(x,y,z)=h(x+y+z)$$

证明 由于 $\varphi(x,y,z)=f(x+y,z)=\varphi(0,x+y,z)=g(0,x+y+z)$，因此只要令 $h(t)=g(0,t)$ 即可.

51 整数 $0,\cdots,99$ 的一个子集 S 称为具有性质 A，如果它不可能填入一个 2 行 2 列的填字游戏(0 被写成 00，1 被写成 01 等等). 确定具有性质 A 的子集中元素的最大数.

解 如果存在两个数 $\overline{ab},\overline{bc}\in S$，那么我们即可填形如 $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 的字谜. 逆命题是显然的. 因此，当且仅当 S 中的数的第一个数字的集合和第二个数字的集合不相交时具有性质 A. 因而 S 的元素的最大数目是 25.

52 在平面上给出了一个点 O 和点的序列 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 用 $r_1,r_2,r_3,\cdots$ 表示距离 $OP_1,OP_2,OP_3,\cdots$，它们满足 $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3\leqslant\cdots$. 设 $0<\alpha<1$,假设对每个 n,从点 P_n 到序列中其他任意一点的距离都要大于或等于 r_n^{α},确定尽可能大的指数 β,使得对某个不依赖于 n 的常数 C,对每个 n,成立不等式

$$r_n\geqslant Cn^{\beta},n=1,2,\cdots$$

注 此问题不是初等的,问题提出者所提供的解是不清楚和不完整的. 仅仅说明了如果那种 β 存在,则 $\beta\geqslant\frac{1}{2(1-\alpha)}$.

53 在欧几里得的几何作图问题中,仅允许使用直尺(是无刻度的直尺)和圆规. 在本题中不允许使用圆规,但允许使用宽度固定的两边平行的直尺做出与一条直线有固定距离的平行直线. 用一把直尺,考虑以下作图问题:

(1) 作出一个给定角的角平分线;

(2) 作出给定直线段的中点;

(3) 作出通过三个不共线的点的圆的圆心;

(4) 通过一个给定点作出一条给定直线的平行线.

解 (1) 我们可以相等的距离作两条与角两边平行的直线,这两条线的交点位于角平分线上.

(2) 如果线段 AB 的长度超过尺子的宽度,我们可以用两种不同的方式通过点 A 和 B 作平行线,所得的菱形的对角线就垂直平分线段 AB.

如果线段 AB 太短,我们可以先作一条平行于 AB 的直线 l,并选择一个充分接近此线段的点 C,使得可从点 C 把 AB 中心投影到 l 上,那样可得到一个任意长的线段 $A'B'\parallel AB$. 那么我们可像上面那样作出 $A'B'$ 的中点 D'. 直线 $D'C$ 和线段 AB 的交点就是它的中点 D. 通过作平行于 DC 的直线,线段 AB 可以被对称地延长,然后即可像上面那样作出它的垂直平分线.

(3) 可从(2) 立即得出.

(4) 设给定了一个点 P 和直线 l. 我们先通过点 P 作一条任意的直线,它交 l 于点 A. 然后在 AP 的两边作两条与 AP 距离相等的与 AP 平行的直线 l_1 与 l_2. 设直线 l_1 与 l 相交于点 B. 我们可以作 AP 的中点 C. 如果 BC 交 l_2 于点 D,那么 PD 平行于 l.

54 是否可能把 100(或 200) 个点放进一个木质的立方体内，使得在立方体的每个旋转下，这些点都变为它们自身，验证你的答案.

解 设 S 是立方体中一个给定的点集，用 x,y,z 分别表示 S 中位于顶点处，棱的中点处以及面的中点处的点的数目，u 表示 S 中所有其他点的数目. S 中或者没有立方体的顶点，或者每个顶点都在 S 中. 因此 x 等于 0 或 8. 类似的 y 等于 0 或 12，z 等于 0 或 6. 因此 u 可被 24 整除. 由于 $n=x+y+z+u$ 并且 $6\mid y,z,u$，这就得出 $6\mid n$ 或 $6\mid(n-8)$. 即 $n\equiv 0$ 或 $2\pmod 6$. 因此 n 可能等于 200，但不可能等于 100，由于 $100\equiv 4\pmod 6$.

55 求出所有的 x，使得对所有的 n 成立

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解 只需从$(0,2\pi]$中找出对所有的 n 使得不等式成立的 x 即可.

假设 $0<x<\frac{2\pi}{3}$，设 n 是使 $nx\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 的最大整数，则我们有 $\frac{\pi}{3}<nx\leqslant\frac{2\pi}{3}$，因此 $\sin nx\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，这样就有 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

现在设$\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2\pi$，这时我们有

$$\sin x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\leqslant$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}+1}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cot\frac{x}{4}}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

对 $x=2\pi$，所给的不等式显然对所有的 n 都成立. 因此当且仅当对某个整数 k

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi+2k\pi$$

时，所给不等式对所有的 n 成立.

56 在一组翻译中,每个人都会说一种或几种外语.其中 24 人会说日语,24 人会说马来语,24 人会说波斯语.证明:可以在这组翻译中选出一个小组,使得其中恰有 12 人只会说日语,12 人只会说马来语,12 人只会说波斯语.

证明 我们将对 n 做归纳法以证明如下命题:如果一个恰有 $n(n\geqslant 2)$ 个人的翻译组中的每个人都会讲三种语言之中的某种语言,则可从其中选出一个小组,使得在此小组中每种语言都只恰有两人会说.

问题中的命题易于由此命题得出:只需选六个那种小组即可.

$n=2$ 的情况是显然的.现在假设 $n\geqslant 2$,设 $N_j,N_m,N_f,N_{jm},N_{jf},N_{mf},N_{jmf}$ 分别表示只会说日语,马来语,波斯语,会说日语和马来语,会说日语和波斯语,会说马来语和波斯语,以及三种语言都会说的翻译的集合.用 $n_j,n_m,n_f,n_{jm},n_{jf},n_{mf},n_{jmf}$ 分别表示这些集合的人数.那么由条件可知

$$n_j+n_{jm}+n_{jf}+n_{jmf}=n_m+n_{jm}+n_{mf}+n_{jmf}=$$
$$n_f+n_{jf}+n_{mf}+n_{jmf}=24$$

因此 $$n_j-n_{mf}=n_m-n_{jf}=n_f-n_{jm}=c$$

如果 $c<0$,那么 $n_{jm},n_{jf},n_{mf}>0$,因此只需从集合 N_{jm},N_{jf},N_{mf} 中各选一人即可.

如果 $c>0$,那么 $n_j,n_m,n_f>0$,因此只需从集合 N_j,N_m,N_f 中各选一人,再应用归纳法假设即可.

如果 $c=0$,那么不失一般性,可设 $n_j=n_{mf}>0$,那么可从 N_j,N_{mf} 中各选一人,再应用归纳法假设即可.

这就完成了归纳法的证明.

57 考虑如下序列 c_n

$$c_1=a_1+a_2+\cdots+a_8$$
$$c_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2$$
$$\vdots$$
$$c_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n$$
$$\vdots$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 都是不同时等于 0 的实数.在序列 c_n 中有无限多个数等于 0,确定所有使 $c_n=0$ 的 n.

解 显然对所有偶数 $n,c_n>0$,因此只可能对奇数 n 成立

$c_n=0$. 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_8$，特别 $a_1\leqslant 0\leqslant a_8$.

如果 $|a_1|<|a_8|$，那么必存在 n_0 使得对每个奇数 $n>n_0$，$7|a_1|^n<a_8^n$，由此得出 $a_1^n+\cdots+a_7^n+a_8^n>7a_1^n+a_8^n>0$ 与条件有无限多个 n 使得 $c_n=0$ 矛盾. 类似可证也不可能有 $|a_1|>|a_8|$，因此必有 $a_1=-a_8$.

依此类推，我们可以证明 $a_2=-a_7$，$a_3=-a_6$ 及 $a_4=-a_5$，因此对所有的奇数 n，$c_n=0$.

58 一个线性二项式 $l(z)=Az+B$，其中 A 和 B 都是复系数. 已知 $|l(z)|$ 在实线段 $-1\leqslant x\leqslant 1(y=0)$ 上的最大值等于 $M(z=x+\mathrm{i}y$ 属于复平面). 证明：对每个 z

$$|l(z)|\leqslant M\rho$$

其中 ρ 是点从 $P=z$ 到点 $Q_1:z=1$ 和 $Q_2:z=1$ 的距离之和.

证明 以下各式使我们得出比所要证的结论更强的估计.

$$|l(z)|=|Az+B|=\frac{1}{2}|(z+1)(A+B)+(z-1)(A-B)|=$$

$$\frac{1}{2}|(z+1)f(1)+(z-1)f(-1)|\leqslant$$

$$\frac{1}{2}(|z+1|\cdot|f(1)|+|z-1|\cdot|f(-1)|)\leqslant$$

$$\frac{1}{2}(|z+1|+|z-1|)M=\frac{1}{2}\rho M$$

59 在圆心为 O，半径为 1 的圆上，点 A_0 是固定的，而点 A_1，A_2，…，A_{999}，$A_{1\,000}$ 使得 $\angle A_0OA_k=k$(以弧度为单位). 在点 A_0，A_1，…，$A_{1\,000}$ 处把圆剪断，问可以得到多少种不同长度的弧？

解 当我们说 $\widehat{AB}$ 时，我们总是指正的 $\widehat{AB}$. 我们用 $|AB|$ 表示 $\widehat{AB}$ 的长度. 一个基本弧是指点 A_0，A_1，…，A_n(其中 $n\in\mathbf{N}$) 把整个圆分成的 $n+1$ 段弧中的一段弧. 现在设 $\widehat{A_pA_0}$ 和 $\widehat{A_0A_q}$ 是端点在 A_0 的基本弧，而 x_n，y_n 分别是它们的长度. 我们对 n 作归纳法以证明对每个 n，基本弧的长度是 x_n，y_n 或 x_n+y_n.

对 $n=1$，命题是显然的. 假设命题对 n 成立，且设 $\widehat{A_iA_{n+1}}$，$\widehat{A_{n+1}A_j}$ 是基本弧. 我们将证明这两条弧的长度是 x_n，y_n 或 x_n+y_n. 如果 i，j 都是严格正的，那么由归纳假设可知 $|A_iA_{n+1}|=|A_{i-1}A_n|$ 与 $|A_{n+1}A_j|=|A_nA_{j-1}|$ 的长度等于 x_n，y_n 或 x_n+y_n.

现在设 $i=0$,即$\widehat{A_pA_{n+1}}$ 和$\widehat{A_{n+1}A_0}$ 是基本弧.那么$|A_pA_{n+1}|=|A_0A_{n+1-p}|\geqslant|A_0A_q|=y_n$,类似的$|A_{n+1}A_q|\geqslant x_n$,但是$|A_pA_q|=x_n+y_n$,由此得出$|A_pA_{n+1}|=|A_0A_q|=y_n$,因此$n+1=p+q$.同样$x_{n+1}=|A_{n+1}A_0|=y_n-x_n$以及$y_{n+1}=x_n$.现在,所有的基本弧的长度为$y_n-x_n,x_n,y_nx_n+y_n$,出现长度为$x_n+y_n$的基本弧将破坏归纳法的进行.然而,由于$2\pi$是无理数,因此如果有任何基本弧$\widehat{A_kA_l}$的长度为$x_n+y_n$,则必须有$l-q=k-p$,因而$\widehat{A_kA_l}$或者包含点$A_{k-p}$(如果$k\geqslant p$)或者包含点$A_{k+q}$(如果$k<p$),这是不可能的.这就完成了对$i=0$的证明.对$j=0$的证明是类似的.这就完成了归纳法.

从以上证明还可以看出当且仅当$n=p+q-1$时,基本弧只能取两种不同的长度.如果我们用n_k表示满足此关系的n的序列,并用p_k,q_k表示对应的p,q的序列,则我们有$p_1=q_1=1$以及

$$(p_{k+1},q_{k+1})=\begin{cases}(p_k+q_k,q_k), & \left\{\dfrac{p_k}{2\pi}\right\}+\left\{\dfrac{q_k}{2\pi}\right\}>1\\(p_k,p_k+q_k), & \left\{\dfrac{p_k}{2\pi}\right\}+\left\{\dfrac{q_k}{2\pi}\right\}<1\end{cases}$$

现在"容易"算出$p_{19}=p_{20}=333,q_{19}=377,q_{20}=710$,那样$n_{19}=709<1\ 000<1\ 042=n_{20}$.由此就得出对$n=1\ 000$,基本弧恰取三种不同的长度.

第 10 届国际数学奥林匹克预选题及解答

1 两艘轮船在海上以固定的速度和方向航行. 已知在 9:00 时,两船之间的距离为 20 海里,在 9:35 时是 15 海里,在 9:55 时是 13 海里. 问在什么时刻两船间的距离最小,并求此最小距离.

解 设 A 是第一艘船上固定的一点. B_1,B_2,B_3 和 B 分别是第二艘船航线上在时刻 9:00,9:35,9:55 和两船最接近时刻的位置. 那么我们有

$$AB_1=20,AB_2=15,AB_3=13$$

$$B_1B_2:B_2B_3=7:4$$

$$AB_3^2=AB^2+BB_3^2$$

由于 $BB_1>BB_2>BB_3$,这就得出 B_1,B_2,B_3 和 B 之间的顺序是 B_3,B,B_2,B_1 或 B,B_3,B_2,B_1. 我们得到未知量为 AB,BB_3 和 B_3B_2 的三个二次方程的方程组(在顺序为 B_3,B,B_2,B_1 时,BB_3 是负的,其他是正的). 这可以通过消去 AB 和 BB_3 解出. 最后得出的唯一解是

$$AB=12,BB_3=5,B_3B_2=4$$

因此,两船在 10:20 时最接近,那时的距离是 12 海里.

2 证明存在唯一的三角形,使其边长为相继的自然数,且有一个角是另一个的两倍.

证明 角度满足 $\angle ABC=2\angle BAC$ 的 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足关系 $b^2=a(a+c)$. 再加上 a,b,c 是使得 $a<b$ 的相继自然数这一条件,我们得出三种情况:

(1)$a=n,b=n+1,c=n+2$,这时得到方程 $(n+1)^2=n(2n+2)$,由此得出 $(a,b,c)=(1,2,3)$,这个解不能构成一个三角形.

(2)$a=n,b=n+2,c=n+1$,这时得到方程 $(n+2)^2=n(2n+1)\Rightarrow(n-4)(n+1)=0$,由此得出 $(a,b,c)=(4,6,5)$.

(3)$a=n+1,b=n+2,c=n$,这时得到方程 $(n+2)^2=(n+1)(2n+1)\Rightarrow n^2-n-3=0$,这个方程没有正整数解.

因此,问题的唯一解就是边长为 4,5 和 6 的三角形.

3 证明在任意四面体中都存在一个顶点，使得通过这个顶点的三条棱可构成一个三角形.

证明 由于三条线段可构成一个三角形的充要条件是其中任意一条线段的长度小于其余两条线段长度之和，所以当且仅当三条线段的长度之一大于或等于其余两条之和时，这些线段才不能构成一个三角形. 现在设从四面体 $ABCD$ 的任一个顶点发出的三条棱都不能构成一个三角形. 不失一般性，可设 AB 是最长的棱. 那么

$$AB \geqslant AC + AD, BA \geqslant BC + BD$$

由此得出

$$2AB \geqslant AC + AD + BC + BD.$$

这蕴含

$$AB \geqslant AC + BC \text{ 或 } AB \geqslant AD + BD$$

而这都和三角不等式矛盾(分别看 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$). 因此，从顶点 A 或 B 发出的三条棱必可构成一个三角形.

注 这一证明可以推广到所有的面都由三角形构成的多面体上去.

4 设 a,b,c 都是实数，$a \neq 0$. 证明：当且仅当 $(b-1)^2-4ac=0$ 时，方程组

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \vdots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

有唯一的实数解.

证明 充分性. 设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是方程组的唯一解. 由于 $(x_n, x_1,\cdots,x_{n-1})$ 也是解，这就得出 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，因此所给的方程组可以归结为一个单个的方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$. 由于解 x 是唯一的，故此二次方程的判别式 $(b-1)^2-4ac$ 必等于 0.

必要性. 现在设 $(b-1)^2-4ac=0$，把方程组中所有的方程相加，我们得出

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=0, \text{其中 } f(x)=ax^2+(b-1)x+c$$

但是，由所给的条件可知 $f(x)=a\left(x+\dfrac{b-1}{2a}\right)^2$，因此必须对

所有的 i 都有 $f(x_i)=0$，因而有唯一的解 $x_i=-\frac{b-1}{2a}$，$i=1,2,\cdots,n$，这确实是原方程组的解.

5 设 h_n 是一个内接于半径为 r 的圆内的正 $n(n\geqslant 3)$ 边形的边心距(从中心到其中一边的距离). 证明不等式

$$(n+1)h_{n+1}-nh_n>r$$

并证明对所有的 $n\geqslant 3$，如果把右边的 r 换成一个更大的数，不等式将不再成立.

证明 对所有的 $k\in\mathbf{N}$，我们有 $h_k=r\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$. 对所有的 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 利用 $\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，$\cos x=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1$ 以及 $\tan x>x>\sin x$，只需证明以下式子即可

$$(n+1)\left(1-2\frac{\pi^2}{4(n+1)^2}\right)-n\left(\frac{2}{1+\frac{\pi^2}{4n^2}}-1\right)>1$$

$$\Leftrightarrow 1+2n\left(1-\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4n^2}}\right)-\frac{\pi^2}{2(n+1)}>1$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{n+\frac{\pi^2}{4n}}-\frac{1}{n+1}\right)>1$$

最后一个不等式成立是由于 $\pi^2<4n$. 同样当 n 趋于无穷时，括号中的式子趋于 0，因此不可能有更强的界. 这就完成了证明.

6 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是不同的非零实数，证明方程

$$\frac{a_1}{a_1-x}+\frac{a_2}{a_2-x}+\cdots+\frac{a_n}{a_n-x}=n$$

至少有 $n-1$ 个实根.

证明 定义一个函数 $f(x)=\frac{a_1}{a_1-x}+\frac{a_2}{a_2-x}+\cdots+\frac{a_n}{a_n-x}$，不失一般性，设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 注意对所有的 $1\leqslant i<n$ 函数 f 在区间 (a_i,a_{i+1}) 中连续且满足 $\lim\limits_{x\to a_i}f(x)\to-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to a_{i+1}}f(x)\to+\infty$，因此方程 $f(x)=n$ 在每个区间 (a_i,a_{i+1}) 中有一个实数解.

注 事实上，由于 $x=0$ 显然是一个解，所以这个方程恰有 n 个解，因此它们都是实数. 此外，如果 a_i 的符号都相同，这些解都是不同的.

7 证明:一个给定的三角形的三个旁切圆半径的积不超过其边长的积的$\frac{3\sqrt{3}}{8}$倍.

证明 设 r_a, r_b, r_c 分别表示对应于边 a, b, c 的旁切圆半径,而 R, p 和 S 分别表示所给三角形的外接圆半径,半周长和面积.那么,众所周知

$$r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)=S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R} \quad ①$$

因此所需的不等式 $r_ar_br_c \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}abc$ 可归结为 $p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$*.

而由正弦定理,它又等价于

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

由于正弦函数在区间$[0,\pi]$上是上凸的,这个不等式可立即由 Jensen(琴生)不等式得出.当且仅当三角形是等边三角形的情况下,等号成立.

* 由式①可知

$r_a(p-a)\cdot r_b(p-b)\cdot r_c(p-c)=$
$p(p-a)(p-b)(p-c)$
$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
因此
$r_a\cdot r_b\cdot r_c=$
$p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$
$p\cdot\frac{abc}{4R}$

于是,为证所要证的不等式,只需证明

$$p\cdot\frac{abc}{4R}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}abc$$

或 $$p\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}R$$

8 给出一条有向直线 Δ 和其上固定的一点 A.考虑所有那种梯形 $ABCD$,其底 AB 位于 Δ 的正方向上.设 E, F 分别是 AB 和 CD 的中点.求梯形的顶点 B, C, D 在满足以下条件时的轨迹:

(1) $|AB| \leqslant a$(a 固定);

(2) $|EF|=l$,(l 固定);

(3) 梯形的不平行边的平方和是常数;

假定以上常数都使梯形存在.

解 设 G 是使四边形 $BCDG$ 是一个平行四边形的点,H 是 AG 的中点.显然四边形 $HEFD$ 也是平行四边形,因而 $DH=EF=l$.如果 $AD^2+BC^2=m^2$ 是固定的,则由 Stewart 定理有

$$DH^2=\frac{2DA^2+2DG^2-AG^2}{4}=\frac{2m^2-AG^2}{4}$$

这个值是固定的.

那么,G 和 H 是固定点,由此可知点 D 的轨迹是以点 H 为圆心,l 为半径的圆.B 的轨迹是线段GI,其中 $I\in\Delta$ 是沿正方向上使 $AI=a$ 的点.最后点 C 的轨迹是平面中由圆心分别在 H 和 H',半径为 l 的半圆和处于这两个半圆之间的矩形组成的区域,其中 H'

是使 $IH'=GH$ 的点.

9 设 $\triangle ABC$ 是任意三角形. M 是它内部的一点. 设 d_a, d_b, d_c 分别是从 M 到边 BC,边 CA,边 AB 的距离. a,b,c 分别是三角形的边长,而 S 是三角形的面积. 证明不等式

$$abd_ad_b + bcd_bd_c + cad_cd_a \leqslant \frac{4}{3}S^2$$

当 M 与 $\triangle ABC$ 的重心重合时,上式左边达到其最大值.

证明 注意 $S_a=\frac{ad_a}{2}, S_b=\frac{bd_b}{2}$ 和 $S_c=\frac{cd_c}{2}$ 分别是 $\triangle MBC$, $\triangle MCA$ 和 $\triangle MAB$ 的面积. 因而所需证明的不等式可从

$$S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \leqslant \frac{1}{3}(S_a+S_b+S_c)^2 = \frac{S^2}{3}$$

得出. 当且仅当 $S_a=S_b=S_c$ 时等号成立,这等价于 M 是 $\triangle ABC$ 的重心.

10 考虑两条长度为 $a,b(a>b)$ 的线段和一条长度为 $c=\sqrt{ab}$ 的线段.

(1) 当 $\frac{a}{b}$ 为何值时,这些线段可构成一个三角形?

(2) 当 $\frac{a}{b}$ 为何值时,这些线段可构成一个直角三角形,钝角三角形或锐角三角形?

解 (1) 设 $k=\frac{a}{b}>1$,那么 $a=kb, c=\sqrt{k}b$ 且 $a>c>b$. 当且仅当 $k<\sqrt{k}+1$ 时,线段 a,b,c 可构成三角形. 这等价于 $1<k<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(2) 当且仅当 $a^2=b^2+c^2$ 时,线段 a,b,c 构成的三角形是直角三角形,这等价于 $k^2=k+1\Leftrightarrow k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 同理由这三条线段所构成的三角形是锐角三角形等价于 $k^2<k+1\Leftrightarrow 1<k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由这三条线段所构成的三角形是钝角三角形等价于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<k<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

11 求出方程

$$1+\frac{1}{x_1}+\frac{x_1+1}{x_1x_2}+\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1x_2x_3}+\cdots+$$
$$\frac{(x_1+1)\cdots(x_{n-1}+1)}{x_1x_2\cdots x_n}=0$$

的所有解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

解 引入 $y_i=\frac{1}{x_i}$,所给的方程可变为

$$0=1+y_1+(1+y_1)y_2+\cdots+(1+y_1)\cdots(1+y_{n-1})y_n=$$
$$(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n)$$

此方程的解是所有的 n 元组$(y_1,\cdots,y_n)$,其中对所有的 $i,y_i\neq 0$,且至少对一个 $j,y_j=-1$. 回到 x_i,我们得出解是所有的 n 元组$(x_1,\cdots,x_n)$,其中对所有的 $i,x_i\neq 0$,且至少对一个 $j,x_j=-1$.

12 设 a,b 是任意正实数,而 m 是整数,证明

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\geqslant 2^{m+1}$$

证明 原不等式等价于

$$\frac{(a+b)^m}{b^m}+\frac{(a+b)^m}{a^m}\geqslant 2^{m+1}$$

它可以写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}\right)\geqslant\left(\frac{2}{a+b}\right)^m$$

由于对每个 $m\in\mathbf{Z},f(x)=\frac{1}{x^m}$ 是凸函数,因此上面的不等式立即可从 Jensen(琴生)不等式$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$得出.

13 给了两个全等的三角形,$\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ $(A_iA_k=B_iB_k)$. 证明存在一个平面使这两个三角形在此平面上的正交投影是全等的和相同定向的.

证明 首先把三角形平移,使得(不失一般性,可设)B_1 与 A_1 重合,同时设 $B_2\neq A_2,B_3\neq A_3$,否则结果是显然的.

存在一个通过 A_1 并平行于 A_2B_2 和 A_3B_3 的平面 π. 设 A'_2,A'_3,B'_2,B'_3 分别表示 A_2,A_3,B_2,B_3 在 π 上的正交投影,并分别用 h_2,h_3 表示从 A_2,B_2 和 A_3,B_3 到 π 的距离. 由勾股定理可知 $A_2A'^2_3=A_2A_3^2-(h_2+h_3)^2=B_2B_3^2-(h_2+h_3)^2=B'_2B'^2_3$,因此,

$A'_2A'_3=B'_2B'_3$，类似地有 $A_1A'_2=A_1B'_2$ 和 $A_1A'_3=A_1B'_3$. 因此 $\triangle A_1A'_2A'_3$ 和 $\triangle A_1B'_2B'_3$ 全等. 如果这两个三角形是同定向的，那么结论已经成立. 否则，它们将对某个通过点 A_1 的直线 a 对称，并且 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 在通过 a 并垂直于 π 的平面上的投影重合.

14 $\triangle ABC$ 所在的平面上的一条直线分别和边 AB 与边 AC 交于点 X,Y，使 $BX=CY$. 求 $\triangle XAY$ 的外接圆圆心的轨迹.

解 设 O,D,E 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心和 AB,AC 的中点. 并且设给定了任意的 $X\in AB$ 和 $Y\in AC$ 使得 $BX=CY$. 又设 O_1,D_1,E_1 分别是 $\triangle AXY$ 的外接圆圆心和 AX,AY 的中点. 由于 $AD=\frac{AB}{2}$，$AD_1=\frac{AX}{2}$，故 $DD_1=\frac{BX}{2}$，类似地有 $EE_1=\frac{CY}{2}$. 因此 O_1 到 OD 和 OE 有相同的距离 $\frac{BX}{2}=\frac{CY}{2}$，并位于 $\angle DOE$ 的平分线 l 上.

如果我们让点 X,Y 沿着线段 AB 和 AC 变动，就得出点 O_1 的轨迹是线段 OP，其中 $P\in l$ 是距 OD 和 OE 的距离等于 $\frac{\min(AB,AC)}{2}$ 的点.

15 设 $[x]$ 表示 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数，n 是一个整数. 把以下和式表示成一个 n 的简单函数

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]+\cdots$$

解法 1 设 $f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]+\cdots$.
我们用归纳法证明 $f(n)=n$. 对 $n=1$，结论显然成立. 假设 $f(n-1)=n-1$，定义

$$g(i,n)=\left[\frac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]-\left[\frac{n-1+2^i}{2^{i+1}}\right]$$

那么我们有 $f(n)-f(n+1)=\sum_{i=0}^{\infty}g(i,n)$. 我们也注意当且仅当 $2^{i+1}\mid(n+2^i)$ 时，$g(i,n)=1$，否则对给定的 n，$g(i,n)=0$. $2^{i+1}\mid(n+2^i)$ 等价于 $2^i\mid n$ 以及 $2^{i+1}\nmid n$，这恰对某一个 $i\in N_0$ 成立. 那么，从 $f(n)-f(n-1)=1$ 就推出 $f(n)=n$. 这就完成了归纳法的证明.

解法 2 易于证明对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$，

因此

$$f(x)=\left([x]-\left[\frac{x}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{4}\right]\right)+\cdots=[x]$$

因此对所有的 $n\in\mathbf{N}$ 有 $f(n)=n$.

16 称整系数多项式 $p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$ 可被整数 m 整除,如果对所有 x 的整数值,$p(x)$ 都可被 m 整除.证明如果 $p(x)$ 都可被 m 整除,那么 $k!\ a_0$ 也可被 m 整除.还证明如果 a_0,k,m 是使得 $k!\ a_0$ 可被 m 整除的非负整数,那么必存在可被 m 整除的多项式 $p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$.

证明 我们将对 k 应用归纳法来证明所需的结果.对 $k=0$,结果是显然的.现在设结果对 $k-1$ 成立,并设 $p(x)$ 是一个 k 次多项式.设 $p_1(x)=p(x+1)-p(x)$,那么 $p_1(x)$ 是一个首项系数为 ka_0 的 $k-1$ 次多项式.对所有的 $x\in\mathbf{Z}$ 有 $m\in p_1(x)$,因此由归纳假设可知,$m\mid(k-1)!\cdot ka_0=k!\ a_0$,这就完成了归纳法.

另对任意 a_0,k 和 $m\mid k!\ a_0$,$p(x)=k!\ a_0\binom{x}{k}$ 就是一个首项系数为 a_0 并可被 m 整除的多项式.

17 给了一个点 O 和长度 x,y,z.证明:当且仅当 $x+y\geqslant z$,$y+z\geqslant x$,$z+x\geqslant y$ 时,存在等边 $\triangle ABC$ 使得 $OA=x$,$OB=y$,$OC=z$(点 O,A,B,C 是共面的).

证明 设存在等边 $\triangle ABC$ 和点 O 使 $OA=x$,$OB=y$,$OC=z$.设 X 是平面上使 $\triangle CXB$ 和 $\triangle COA$ 全等的并定向相同的点,那么 $BX=x$,且 $\triangle XOC$ 是等边的.这蕴含 $OX=z$.这样,我们就得出 $\triangle OBX$ 使得 $BX=x$,$BO=y$ 以及 $OX=z$.

反之,给了 $\triangle OBX$ 使得 $BX=x$,$BO=y$ 以及 $OX=z$.那么易作出 $\triangle ABC$.

18 给定锐角 $\triangle ABC$,在空间中作一个等边 $\triangle A'B'C'$ 使得直线 AA',BB',CC' 通过一个给定的点.

解 所求的作法是不可行的.事实上,考虑一种特殊的情况:$\angle BOC=135^\circ$,$\angle AOC=120^\circ$,$\angle AOB=90^\circ$,其中 $AA'\cap BB'\cap CC'=\{O\}$,用 a,b,c 分别表示 OA',OB',OC',那么我们得出方程组 $a^2+b^2=a^2+c^2+ac=b^2+c^2+\sqrt{2}\,bc$.不失一般性,设 $c=1$,则易于得出 $a^3-a^2-a-1=0$,这是一个不可约的三次方程,由尺

规作图的理论可知,a 不可能用圆规和直尺作出.

19 在一个半径为 1 的圆上给出了一个固定的点.从这点开始,沿着圆的正向走了曲线距离 0,1,2,….那么我们得到一些下标为 0,1,2,… 的点.需要取多少个点才能保证它们中间有两个点间的距离小于$\frac{1}{5}$.

解 用 d_n 表示沿正方向从初始点到第 n 个点之间的最短距离.序列 d_n 的前 20 项为 0,1,2,3,4,5,6,0.72,1.72,…,5.72,0.43,1.43,…,5.43,$0.15=d_{19}$.因此所需的点数为 20.

20 在空间中给了 $n(n\geqslant 3)$ 个点,其中每三个点构成一个其中有一个角大于或等于120°的三角形.证明:可以把这些点记成 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 使得对每个 $i,j,k,1\leqslant i<j<k\leqslant n$,$\angle A_iA_jA_k$ 大于或等于120°.

证明 设用那种方法表示点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得 A_1A_n 是所给点集的直径,且 $A_1A_2\leqslant A_1A_3\leqslant\cdots\leqslant A_1A_n$.由于对每个 $1<i<n$,$A_1A_i<A_1A_n$ 成立.我们有 $\angle A_iA_1A_n<120^\circ$ 而因此 $\angle A_iA_1A_n<60^\circ$(否则 $\triangle A_1A_iA_n$ 中所有的角都要小于120°).这就得出对所有的 $1<i<j\leqslant n$,$\angle A_iA_1A_j<120^\circ$.所以 $\triangle A_1A_iA_j$ 中小于120°的角必须是 $\angle A_1A_iA_j$.此外,对任意 $1<i<j<k\leqslant n$,$\angle A_iA_jA_k\geqslant\angle A_1A_jA_k-\angle A_1A_jA_i>120^\circ-60^\circ=60^\circ$ 成立(由于 $\angle A_1A_jA_i<60^\circ$),因此 $\angle A_iA_jA_k\geqslant 120^\circ$.这就证明了以上的表示法是正确的.

注 易于证明直径是唯一的,因此这种表示法也是唯一的.

21 设 $a_0,a_1,\cdots,a_k(k\geqslant 1)$ 是正整数,求出所有使

$$a_0\mid y;(a_0+a_1)\mid(y+a_1);\cdots;(a_0+a_n)\mid(y+a_n)$$

的整数 y.

解 所给的条件等价于 $y-a_0$ 可被 $a_0,a_0+a_1,a_0+a_2,\cdots,a_0+a_n$ 整除,即

$$y=k[a_0,a_0+a_1,\cdots,a_0+a_n]+a_0,k\in\mathbf{N}_+$$

22 求出所有使 $p(x)=x^2-10x-22$ 的正整数 x,其中 $p(x)$ 表示 x 的各位数字的乘积.

解 对 x 的位数做归纳法可以证明对所有的 $x\in\mathbf{N}$,有 $p(x)\leqslant x$. 由此得出 $x^2-10x-22\leqslant x$,这蕴含 $x\leqslant 12$. 从 $0<x^2-10x-22=(x-12)(x+2)+2$ 又易于得出 $x\geqslant 12$. 现在可以直接验证 $x=12$ 确实是一个解,并且是唯一的解.

23 求出所有的复数 m,使得多项式

$$x^3+y^3+z^3+mxyz$$

可以被表示成三个线性三项式的乘积.

解 不失一般性,在所有的因式中,z 的系数都是 1. 设 $z+ax+by$ 是 $p(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+mxyz$ 的一个线性因子. 那么 $p(z)$ 在每个 $z=-ax-by$ 处都是 0,因此

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+(-ax-by)^3+mxy(-ax-by)=\\&(1-a^3)x^3-(3ab+m)(ax+by)xy+(1-b^3)y^3\equiv 0\end{aligned}$$

这显然等价于 $a^3=b^3=1$ 和 $m=-3ab$,由此可以得出 $m\in\{-3,-3\omega,-3\omega^2\}$,其中 $\omega=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. 因此对 m 的每个可能值,恰有三个可能的 (a,b),故 $-3,-3\omega,-3\omega^2$ 就是所求的值.

24 求出所有的 n 位数,使得在第 $i(1<i<n)$ 位是某个固定的数字,而后 j 位数是不同的.

解 当第 i 个数字是 0 时,如果 $i>k-j$,那么结果为 $\dfrac{9^{k-j}9!}{(10-j)!}$,否则为 $\dfrac{9^{k-j-1}9!}{(9-j)!}$. 当第 i 个数字不是 0 时,需把上面的结果都乘以 8.

25 给出 k 条平行线,每条线上又给了几个点. 求出能以这些给定点为顶点的三角形的数目 *.

解 答案是 $\displaystyle\sum_{1\leqslant p<q<r\leqslant k}n_pn_qn_r+\sum_{1\leqslant p<q\leqslant k}\left[n_p\binom{n_q}{2}+n_q\binom{n_p}{2}\right]$.

* 此问题的含义不清,正确的叙述应为

给出 k 条平行线 $l_1,\cdots,l_k$ 和 n_i 个位于直线 l_i,$i=1,2,\cdots,k$ 上的点,求出最多可以这些点为顶点构成多少三角形?

26 设 $a>0$ 是一个实数，$f(x)$ 是一个在全数轴 $\mathbf{R}$ 上有定义的实数，对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$$

(1) 证明函数 f 是周期函数，即存在一个 $b>0$，使得对所有的 x，$f(x+b)=f(x)$；

(2) 对 $a=1$，给出一个不是常数的那种函数的例子.

解 (1) 证明：我们将证明 f 的周期是 $2a$. 由 $\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=f(x)-f^2(x)$，我们得出

$$(f(x)-f^2(x))+(f(x+a)-f^2(x+a))=\frac{1}{4}$$

把上式中的 x 换成 $x+a$，我们得出

$$f(x)-f^2(x)=f(x+2a)-f^2(x+2a)$$

这蕴含

$$\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2$$

由条件可知，对所有的 x，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 成立，由此即可推出 $f(x+2a)=f(x)$.

(2) 通过直接验证可知以下函数满足条件

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2n\leqslant x<2n+1\\ 1, & 2n+1\leqslant x<2n+2\end{cases}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$.

附　录
IMO 背景介绍

第1章 引 言

第1节 国际数学奥林匹克

国际数学奥林匹克(IMO)是高中学生最重要和最有威望的数学竞赛.它在全面提高高中学生的数学兴趣和发现他们之中的数学尖子方面起着重要作用.

在开始时,IMO是(范围和规模)要比今天小得多的竞赛.在1959年,只有7个国家参加第一届IMO,它们是:保加利亚,捷克斯洛伐克,民主德国,匈牙利,波兰,罗马尼亚和苏联.从此之后,这一竞赛就每年举行一次.渐渐的,东方国家,西欧国家,直至各大洲的世界各地许多国家都加入进来(唯一的一次未能举办竞赛的年份是1980年,那一年由于财政原因,没有一个国家有意主持这一竞赛.今天这已不算一个问题,而且主办国要提前好几年排队).到第45届在雅典举办IMO时,已有不少于85个国家参加.

竞赛的形式很快就稳定下来并且以后就不变了.每个国家可派出6个参赛队员,每个队员都单独参赛(即没有任何队友协助或合作).每个国家也派出一位领队,他参加试题筛选并和其队员隔离直到竞赛结束,而副领队则负责照看队员.

IMO的竞赛共持续两天.每天学生们用四个半小时解题,两天总共要做6道题.通常每天的第一道题是最容易的而最后一道题是最难的,虽然有许多著名的例外(IMO1996—5是奥林匹克竞赛题中最难的问题之一,在700个学生中,仅有6人做出来了这道题!).每题7分,最高分是42分.

每个参赛者的每道题的得分是激烈争论的结果,并且,最终,判卷人所达成的协议由主办国签名,而各国的领队和副领队则捍卫本国队员的得分公平和利益不受损失.这一评分体系保证得出的成绩是相对客观的,分数的误差极少超过2或3点.

各国自然地比较彼此的比分,只设个人奖,即奖牌和荣誉奖,在IMO中仅有少于$\frac{1}{12}$的参赛者被授予金牌,少于$\frac{1}{4}$的参赛者被授予金牌或银牌以及少于$\frac{1}{2}$的参赛者被授予金牌,银牌或者铜牌.在没被授予奖牌的学生之中,对至少有一个问题得满分的那些人授予荣誉奖.这一确定得奖的系统运行的相当完好.一方面它保证有严格的标准并且对参赛者分出适当的层次使得每个参赛者有某种可以尽力争取的目标.另一方面,它也保证竞赛有不依赖于竞赛题的难易差别的很大程度的宽容度.

根据统计,最难的奥林匹克竞赛是1971年,然后依次是1996年,1993年和1999年.得分最低的是1977年,然后依次是1960年和1999年.

竞赛题的筛选分几步进行.首先参赛国向IMO的主办国提交他们提出的供选择用的候选题,这些问题必须是以前未使用过的,且不是众所周知的新鲜问题.主办国不提出备选问题.命题委员会从所收到的问题(称为长问题单,即第一轮预选题)中选出一些问题(称为短

问题单)提交由各国领队组成的 IMO 裁判团,裁判团再从第二轮预选题中选出 6 道题作为 IMO 的竞赛题.

除了数学竞赛外,IMO 也是一次非常大型的社交活动.在竞赛之后,学生们有三天时间享受主办国组织的游览活动以及与世界各地的 IMO 参加者们互动和交往.所有这些都确实是令人难忘的体验.

第 2 节　IMO 竞赛

已出版了很多 IMO 竞赛题的书[65].然而除此之外的第一轮预选题和第二轮预选题尚未被系统加以收集整理和出版,因此这一领域中的专家们对其中很多问题尚不知道.在参考文献中可以找到部分预选题,不过收集的通常是单独某年的预选题.参考文献[1],[30],[41],[60]包括了一些多年的问题.大体上,这些书包括了本书的大约 50%的问题.

本书的目的是把我们全面收集的 IMO 预选题收在一本书中.它由所有的预选题组成,包括从第 10 届以及第 12 届到第 44 届的第二轮预选题和第 19 届竞赛中的第一轮预选题.我们没有第 9 届和第 11 届的第二轮预选题,并且我们也未能发现那两届 IMO 竞赛题是否是从第一轮预选题选出的或是否存在未被保存的第二轮预选题.由于 IMO 的组织者通常不向参赛国的代表提供第一轮预选题,因此我们收集的题目是不全的.在 1989 年题目的末尾收集了许多分散的第一轮预选题,以后有效的第一轮预选题的收集活动就结束了.前八届的问题选取自参考文献[60].

本书的结构如下:如果可能的话,在每一年的问题中,和第一轮预选题或第二轮预选题一起,都单独列出了 IMO 竞赛题.对所有的第二轮预选题都给出了解答.IMO 竞赛题的解答被包括在第二轮预选题的解答中.除了在南斯拉夫举行的两届 IMO(由于爱国原因)之外,对第一轮预选题未给出解答,由于那将使得本书的篇幅不合理的加长.由所收集的问题所决定,本书对奥林匹克训练营的教授和辅导教练是有益的和适用的.通过在题号上附加 LL,SL,IMO 我们指出了题目的年号,是属于第一轮预选题,第二轮预选题还是竞赛题,例如(SL89—15)表示这道题是 1989 年第二轮预选题的第 15 题.

我们也给出了一个在我们的证明中没有明显地引用和导出的所有公式和定理一个概略的列表.由于我们主要关注仅用于本书证明中的定理,我们相信这个列表中所收入的都是解决 IMO 问题时最有用的定理.

在一本书中收集如此之多的问题需要大量的编辑工作,我们对原来叙述不够确切和清楚的问题作了重新叙述,对原来不是用英语表达的问题做了翻译.某些解答是来自作者和其他资源,而另一些解是本书作者所做.

许多非原始的解答显然在收入本书之前已被编辑.我们不能保证本书的问题完全地对应于实际的第一轮预选题或第二轮预选题的名单.然而我们相信本书的编辑已尽可能接近于原来的名单.

第2章 基本概念和事实

下面是本书中经常用到的概念和定理的一个列表.我们推荐读者在(也许)进一步阅读其他文献前首先阅读这一列表并熟悉它们.

第1节 代 数

2.1.1 多项式

定理 2.1 二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 有解

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

二次方程的判别式 D 定义为 $D^2=b^2-4ac$,当 $D<0$ 时,解是复数,并且是共轭的,当 $D=0$ 时,解退化成一个实数解,当 $D>0$ 时,方程有两个不同的实数解.

定义 2.2 二项式系数 $\binom{n}{k}$,$n,k\in\mathbf{N}_0,k\leqslant n$ 定义为

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{i!\ (n-i)!}$$

对 $i>0$,它们满足

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}$$

以及

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

定理 2.3 ((Newton) 二项式公式) 对 $x,y\in\mathbf{C}$ 和 $n\in\mathbf{N}$

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

定理 2.4 (Bezout(裴蜀) 定理) 多项式 $P(x)$ 可被二项式 $x-a(a\in\mathbf{C})$ 整除的充分必要条件是 $P(a)=0$.

定理 2.5 (有理根定理) 如果 $x=\frac{p}{q}$ 是整系数多项式 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 的根,且 $(p,q)=1$,则 $p\mid a_0,q\mid a_n$.

定理 2.6 (代数基本定理) 每个非常数的复系数多项式有一个复根.

定理 2.7 (Eisenstein(爱森斯坦)判据)设 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式,如果存在一个素数 p 和一个整数 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,使得 $p\mid a_0,a_1,\cdots,a_k$,$p\nmid a_{k+1}$ 以及 $p^2\nmid a_0$,那么存在 $P(x)$ 的不可约因子 $Q(x)$,其次数至少是 k. 特别,如果 $k=n-1$,则 $P(x)$ 是不可约的.

定义 2.8 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式是一个在 $x_1,\cdots,x_n$ 的任意排列下不变的多项式,初等对称多项式是 $\sigma_k(x_1,\cdots,x_k)=\sum x_{i_1,\cdots,i_n}$(分别对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 k-元素子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 求和).

定理 2.9 (对称多项式定理)每个 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式都可用初等对称多项式 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 表出.

定理 2.10 (Vieta(韦达)公式)设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $c_1,\cdots,c_n$ 都是复数,使得

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$$

那么对 $k=1,2,\cdots,n$

$$c_k=(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

定理 2.11 (Newton 对称多项式公式)设 $\sigma_k=\sigma_k(x_1,\cdots,x_k)$ 以及 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$,其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是复数,那么

$$k\sigma_k=s_1\sigma_{k-1}+s_2\sigma_{k-2}+\cdots+(-1)^ks_{k-1}\sigma_1+(-1)^ks_k$$

2.1.2 递推关系

定义 2.12 一个递推关系是指一个由序列 $x_n,n\in\mathbf{N}$ 的前面的元素的函数确定的如下的关系

$$x_n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_kx_{n-k}=0\ (n\geqslant k)$$

如果其中的系数 $a_1,\cdots,a_k$ 都是不依赖于 n 的常数,则上述关系称为 k 阶的线性齐次递推关系. 定义此关系的特征多项式为 $P(x)=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$.

定理 2.13 利用上述定义中的记号,设 $P(x)$ 的标准因子分解式为

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_r)^{k_r}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是不同的复数,而 $k_1,\cdots,k_r$ 是正整数,那么这个递推关系的一般解由公式

$$x_n=p_1(n)\alpha_1^n+p_2(n)\alpha_2^n+\cdots+p_r(n)\alpha_r^n$$

给出,其中 p_i 是次数为 k_i 的多项式. 特别,如果 $P(x)$ 有 k 个不同的根,那么所有的 p_i 都是常数.

如果 $x_0,\cdots,x_{k-1}$ 已被设定,那么多项式的系数是唯一确定的.

2.1.3 不等式

定理 2.14 平方函数总是正的,即 $x^2\geqslant 0(\forall x\in\mathbf{R})$. 把 x 换成不同的表达式,可以得出以下的不等式.

定理 2.15 (Bernoulli(伯努利)不等式)

1. 如果 $n\geqslant 1$ 是一个整数,$x>-1$ 是实数,那么 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$;
2. 如果 $\alpha>1$ 或 $\alpha<0$,那么对 $x>-1$ 成立不等式:$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x$;
3. 如果 $\alpha\in(0,1)$,那么对 $x>-1$ 成立不等式:$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x$.

定理 2.16 （平均不等式）对正实数 $x_1,\cdots,x_n$，成立 $QM \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM$，其中

$$QM=\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}},\quad AM=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

$$GM=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},\quad HM=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

所有不等式的等号都当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，数 QM,AM,GM 和 HM 分别被称为平方平均，算术平均，几何平均以及调和平均.

定理 2.17 （一般的平均不等式）设 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数，对 $p\in\mathbf{R}$，定义 $x_1,\cdots,x_n$ 的 p 阶平均为

$$M_p=\left(\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},\quad \text{如果 } p\neq 0$$

以及

$$M_q=\lim_{p\to q}M_p,\quad \text{如果 } q\in\{\pm\infty,0\}$$

特别，$\max x_i,QM,AM,GM,HM$ 和 $\min x_i$ 分别是 $M_\infty,M_2,M_1,M_0,M_{-1}$ 和 $M_{-\infty}$，那么

$$M_p\leqslant M_q,\quad \text{只要 } p\leqslant q$$

定理 2.18 （Cauchy-Schwarz（柯西－许瓦兹）不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立.

定理 2.19 （Hölder（和尔窦）不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是非负实数，p,q 是使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正实数，则

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立. Cauchy-Schwarz（柯西－许瓦兹）不等式是 Hölder（和尔窦）不等式在 $p=q=2$ 时的特殊情况.

定理 2.20 （Minkovski（闵科夫斯基）不等式）设 $a_i,b_i,i=1,2,\cdots,n$ 是非负实数，p 是任意不小于 1 的实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

当 $p>1$ 时，当且仅当存在 $c\in\mathbf{R}$ 使得 $b_i=ca_i,i=1,\cdots,n$ 时，等号成立，当 $p=1$ 时，等号总是成立.

定理 2.21 （Chebyshev（切比雪夫）不等式）设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 以及 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 是实数，则

$$n\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)\geqslant n\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，上面的两个不等式的等号同时成立.

定义 2.22 定义在区间 I 上的实函数 f 称为是凸的，如果对所有的 $x,y\in I$ 和所有使得 $\alpha+\beta=1$ 的 $\alpha,\beta>0$，都有 $f(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha f(x)+\beta f(y)$，函数 f 称为是凹的，如果成立

相反的不等式,即如果 $-f$ 是凸的.

定理 2.23　如果 f 在区间 I 上连续,那么 f 在区间 I 是凸函数的充分必要条件是对所有 $x,y\in I$,成立

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

定理 2.24　如果 f 是可微的,那么 f 是凸函数的充分必要条件是它的导函数 f' 是不减的.类似的,可微函数 f 是凹函数的充分必要条件是它的导函数 f' 是不增的.

定理 2.25　(Jensen(琴生)不等式)如果 $f:I\rightarrow R$ 是凸函数,那么对所有的 $\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 和所有的 $x_i\in I$ 成立不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

对于凹函数,成立相反的不等式.

定理 2.26　(Muirhead(穆黑)不等式)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$,对正实数的 n 元组 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,定义

$$T_a(x_1,\cdots,x_n)=\sum y_1^{a_1}\cdots y_n^{a_n}$$

是对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的所有排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 求和.称 n 元组 a 是优超 n 元组 b 的,如果

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

并且对 $k=1,\cdots,n-1$

$$a_1+\cdots+a_k\geqslant b_1+\cdots+b_k$$

如果不增的 n 元组 a 优超不增的 n 元组 b,那么成立以下不等式

$$T_a(x_1,\cdots,x_n)\geqslant T_b(x_1,\cdots,x_n)$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

定理 2.27　(Schur(舒尔)不等式)利用对 Muirhead(穆黑)不等式使用的记号

$$T_{\lambda+2\mu,0,0}(x_1,x_2,x_3)+T_{\lambda,\mu,\mu}(x_1,x_2,x_3)\geqslant 2T_{\lambda+\mu,\mu,0}(x_1,x_2,x_3)$$

其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}^+$,等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 或 $x_1=x_2,x_3=0$(以及类似情况)时成立.

2.1.4　群和域

定义 2.28　群是一个具有满足以下条件的运算 $*$ 的非空集合 G:

(1) 对所有的 $a,b,c\in G,a*(b*c)=(a*b)*c$;

(2) 存在一个唯一的加法元 $e\in G$ 使得对所有的 $a\in G$ 有 $e*a=a*e=a$;

(3) 对每一个 $a\in G$,存在一个唯一的逆元 $a^{-1}=b\in G$ 使得 $a*b=b*a=e$.

如果 $n\in\mathbf{Z}$,则当 $n\geqslant 0$ 时,定义 a^n 为 $a*a*\cdots*a$(n 次),否则定义为 $(a^{-1})^{-n}$.

定义 2.29　群 $\Gamma=(G,*)$ 称为是交换的或阿贝尔群,如果对任意 $a,b\in G,a*b=b*a$.

定义 2.30　集合 A 生成群 $(G,*)$,如果 G 的每个元用 A 的元素的幂和运算 $*$ 得出.换句话说,如果 A 是群 G 的生成子,那么每个元素 $g\in G$ 就可被写成 $a_1^{i_1}*\cdots*a_n^{i_n}$,其中对 $j=1,2,\cdots,n$ $a_j\in A$ 而 $i_j\in\mathbf{Z}$.

定义 2.31　当存在使得 $a^n=e$ 的 n 时,$a\in G$ 的阶是使得 $a^n=e$ 成立的最小的 $n\in\mathbf{N}$.一个群的阶是指其元素的个数,如果群的每个元素的阶都是有限的,则称其为有限阶的.

定义 2.32　(Lagrange(拉格朗日)定理)在有限群中,元素的阶必整除群的阶.

定义 2.33 一个环是一个具有两种运算+和·的非空集合R使得$(R,+)$是阿贝尔群，并且对任意$a,b,c\in R$，有

(1)$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(2)$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$以及$c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$.

一个环称为是交换的，如果对任意$a,b\in R$，$a\cdot b=b\cdot a$，并且具有乘法单位元$i\in R$，使得对所有的$a\in R$，$i\cdot a=a\cdot i$.

定义 2.34 一个域是一个具有单位元的交换环，在这种环中，每个不是加法单位元的元素a有乘法逆a^{-1}，使得$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=i$.

定理 2.35 下面是一些群，环和域的通常的例子：

群：$(\mathbf{Z}_n,+)$，$(\mathbf{Z}_p\backslash\{0\},\cdot)$，$(\mathbf{Q},+)$，$(\mathbf{R},+)$，$(\mathbf{R}\backslash\{0\},\cdot)$；

环：$(\mathbf{Z}_n,+,\cdot)$，$(\mathbf{Z},+,\cdot)$，$(\mathbf{Z}[x],+,\cdot)$，$(\mathbf{R}[x],+,\cdot)$；

域：$(\mathbf{Z}_p,+,\cdot)$，$(Q,+,\cdot)$，$(Q(\sqrt{2}),+,\cdot)$，$(\mathbf{R},+,\cdot)$，$(\mathbf{C},+,\cdot)$.

第2节 分 析

定义 2.36 说序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$有极限$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（也记为$a_n\to a$），如果对任意$\varepsilon>0$，都存在$n_\varepsilon\in\mathbf{N}$，使得当$n\geqslant n_\varepsilon$时，成立$|a_n-a|<\varepsilon$.

说函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$有极限$y=\lim\limits_{x\to c}f(x)$，如果对任意$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对任意$x\in(a,b)$，$0<|x-c|<\delta$，都有$|f(x)-y|<\varepsilon$.

定义 2.37 称序列x_n收敛到$x\in\mathbf{R}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛到$s\in\mathbf{R}$的含义为$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}x_n=s$. 一个不收敛的序列或级数称为是发散的.

定理 2.38 如果序列a_n单调并且有界，则它必是收敛的.

定义 2.39 称函数f在区间$[a,b]$上是连续的，如果对每个$x_0\in[a,b]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

定义 2.40 称函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$在点$x_0\in(a,b)$是可微的，如果以下极限存在

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

称函数在(a,b)上是可微的，如果它在每一点$x_0\in(a,b)$都是可微的. 函数f'称为是函数f的导数，类似的，可定义f'的导数f''，它称为函数f的二阶导数，等等.

定理 2.41 可微函数是连续的. 如果f和g都是可微的，那么fg，$\alpha f+\beta g(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$，$f\circ g$，$\frac{1}{f}$（如果$f\neq 0$），$f^{-1}$（如果它可被有意义的定义）都是可微的. 并且成立

$$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$$

$$(fg)'=f'g+fg'$$

$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$(f^{-1})'=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})}$$

定理 2.42　以下是一些初等函数的导数(a 表示实常数)

$$(x^a)'=ax^{a-1}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

定理 2.43　(Fermat(费马)定理)设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可微函数,且函数 f 在此区间内达到其极大值或极小值. 如果 $x_0\in(a,b)$ 是一个极值点(即函数在此点达到极大值或极小值),那么 $f'(x_0)=0$.

定理 2.44　(Roll(罗尔)定理)设 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的连续可微函数,且 $f(a)=f(b)=0$,则存在 $c\in(a,b)$,使得 $f'(c)=0$.

定义 2.45　定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开子集 D 上的可微函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 称为是相关的,如果存在非零的可微函数 $F:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ 使得 $F(f_1,\cdots,f_k)$ 在 D 的某个开子集上恒同于 0.

定义 2.46　函数 $f_1,\cdots,f_k:D\to\mathbf{R}$ 是独立的充分必要条件为 $k\times n$ 矩阵 $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$ 的秩为 k,即在某个点,它有 k 行是线性无关的.

定理 2.47　(Lagrange(拉格朗日)乘数)设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集,且 $f,f_1,\cdots,f_k:D\to\mathbf{R}$ 是独立无关的可微函数. 设点 a 是函数 f 在 D 内的一个极值点,使得 $f_1=f_2=\cdots=f_n=0$,则存在实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$(所谓的拉格朗日乘数)使得 a 是函数 $F=f+\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_kf_k$ 的平衡点,即在点 a 使得 F 的偏导数为 0 的点.

定义 2.48　设 f 是定义在$[a,b]$上的实函数,且设 $a=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n=b$ 以及 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$,和 $S=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(\xi_k)$ 称为 Darboux(达布)和,如果 $I=\lim_{\delta\to 0}S$ 存在(其中 $\delta=\max_k(x_k-x_{k-1})$),则称 f 是可积的,并称 I 是它的积分. 每个连续函数在有限区间上都是可积的.

第 3 节　几　何

2.3.1　三角形的几何

定义 2.49　三角形的垂心是其高线的交点.

定义 2.50　三角形的外心是其外接圆的圆心,它是三角形各边的垂直平分线的交点.

定义 2.51　三角形的内心是其内切圆的圆心,它是其各角的角平分线的交点.

定义 2.52　三角形的重心是其各边中线的交点.

定理 2.53　对每个非退化的三角形,垂心,外心,内心,重心都是良定义的.

定理 2.54 (Euler(欧拉)线)任意三角形的垂心 H,重心 G 和外心 O 位于一条直线上(欧拉线),且满足 $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$.

定理 2.55 (9 点圆)三角形从顶点 A,B,C 向对边所引的垂足,AB,BC,CA,AH,BH,CH 各线段的中点位于一个圆上(9 点圆).

定理 2.56 (Feuerbach(费尔巴哈)定理)三角形的 9 点圆和其内切圆和三个外切圆相切.

定理 2.57 给了 $\triangle ABC$,设 $\triangle ABC'$,$\triangle AB'C$ 和 $\triangle A'BC$ 是向外的等边三角形,则 AA',BB',CC' 交于一点,称为 Torricelli(托里拆利)点.

定义 2.58 设 ABC 是一个三角形,P 是一点,而 X,Y,Z 分别是从 P 向 BC,AC,AB 所引垂线的垂足,则 $\triangle XYZ$ 称为 $\triangle ABC$ 的对应于点 P 的 Pedal(佩多)三角形.

定理 2.59 (Simson(西姆松)线)当且仅当点 P 位于 ABC 的外接圆上时,Pedal(佩多)三角形是退化的,即 X,Y,Z 共线,点 X,Y,Z 共线时,它们所在的直线称为 Simson(西姆松)线.

定理 2.60 (Carnot(卡农)定理)从 X,Y,Z 分别向 BC,CA,AB 所作的垂线共点的充分必要条件是

$$BX^2-XC^2+CY^2-YA^2+AZ^2-ZB^2=0$$

定理 2.61 (Desargue(戴沙格)定理)设 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$ 是两个三角形. 直线 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 共点或互相平行的充分必要条件是 $A=B_1C_2\cap B_2C_1$,$B=C_1A_2\cap A_1C_2$,$C=A_1B_2\cap A_2B_1$ 共线.

2.3.2 向量几何

定义 2.62 对任意两个空间中的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,定义其数量积(又称点积)为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi$,而其向量积为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$,其中 $\varphi=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,而 $\boldsymbol{p}$ 是一个长度为 $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot|\sin\varphi|$ 的向量,它垂直于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,并使得有顺序的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$ 是正定向的(注意如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$). 这些积关于两个向量都是线性的. 数量积是交换的,而向量积是反交换的,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. 我们也定义三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

原书注:向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积有时也表示成 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

定理 2.63 (Thale(泰勒斯)定理)设直线 AA' 和 BB' 交于点 O,$A'\neq O\neq B'$. 那么 $AB\ /\!/\ A'B'\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}}=\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OB'}}$,(其中 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ 表示两个非零的共线向量的比例).

定理 2.64 (Ceva(塞瓦)定理)设 ABC 是一个三角形,而 X,Y,Z 分别是直线 BC,CA,AB 上不同于 A,B,C 的点,那么直线 AX,BY,CZ 共点的充分必要条件是

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}=1$$

或等价的

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}\cdot\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA}\cdot\frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB}=1$$

(最后的表达式称为三角形式的 Ceva(塞瓦)定理).

定理 2.65 (Menelaus(梅尼劳斯)定理)利用Ceva(塞瓦)定理中的记号,点 X,Y,Z 共线的充分必要条件是

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}=-1$$

定理 2.66 (Stewart(斯特瓦尔特)定理)设 D 是直线 BC 上任意一点,则

$$AD^2=\frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{BC}}BD^2+\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}}CD^2-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$$

特别,如果 D 是 BC 的中点,则

$$4AD^2=2AB^2+2AC^2-BC^2$$

2.3.3 重心

定义 2.67 一个质点(A,m)是指一个具有质量 $m>0$ 的点 A.

定义 2.68 质点系(A_i,m_i),$i=1,2,\cdots,n$的质心(重心)是指一个使得 $\sum_i m_i\overrightarrow{TA_i}=0$ 的点.

定理 2.69 (Leibniz(莱布尼兹)定理)设 T 是总质量为 $m=m_1+\cdots+m_n$ 的质点系 $\{(A_i,m_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的质心,并设 X 是任意一个点,那么

$$\sum_{i=1}^{n}m_iXA_i^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}m_iTA_i^{\ 2}+mXT^2$$

特别,如果 T 是 $\triangle ABC$ 的重心,而 X 是任意一个点,那么

$$AX^2+BX^2+CX^2=AT^2+BT^2+CT^2+3XT^2$$

2.3.4 四边形

定理 2.70 四边形 $ABCD$ 是共圆的(即 $ABCD$ 存在一个外接圆)的充分必要条件是

$$\angle ACB=\angle ADB$$

或

$$\angle ADC+\angle ABC=180^\circ$$

定理 2.71 (Ptolemy(托勒玫)定理)凸四边形 $ABCD$ 共圆的充分必要条件是

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

对任意四边形 $ABCD$ 则成立 Ptolemy(托勒玫)不等式(见 2.3.7 几何不等式).

定理 2.72 (Casey(开世)定理)设四个圆 k_1,k_2,k_3,k_4 都和圆 k 相切.如果圆 k_i 和 k_j 都和圆 k 内切或外切,那么设 t_{ij} 表示由圆 k_i 和 $k_j(i,j\in\{1,2,3,4\})$ 所确定的外公切线的长度,否则设 t_{ij} 表示内公切线的长度.那么乘积 $t_{12}t_{34}$,$t_{13}t_{24}$ 以及 $t_{14}t_{23}$ 之一是其余二者之和.

圆 k_1,k_2,k_3,k_4 中的某些圆可能退化成一个点,特别设 A,B,C 是圆 k 上的三个点,圆 k 和圆 k' 在一个不包含点 B 的 AC 弧上相切,那么我们有 $AC\cdot b=AB\cdot c+BC\cdot a$,其中 a,b 和 c 分别是从点 A,B 和 C 向 AC 所作的切线的长度.Ptolemy(托勒玫)定理是Casey(开世)定理在四个圆都退化时的特殊情况.

定理 2.73 凸四边形 $ABCD$ 相切(即 $ABCD$ 存在一个内切圆)的充分必要条件是

$$AB+CD=BC+DA$$

定理 2.74 对空间中任意四点 A,B,C,D,$AC\perp BD$ 的充分必要条件是

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$$

定理 2.75　(Newton(牛顿)定理)设 $ABCD$ 是四边形,$AD\cap BC=E$,$AB\cap DC=F$(那种点 A,B,C,D,E,F 构成一个完全四边形). 那么 AC,BD 和 EF 的中点是共线的. 如果 $ABCD$ 相切,那么其内心也在这条直线上.

定理 2.76　(Brocard(布罗卡)定理)设 $ABCD$ 是圆心为 O 的圆内接四边形,并设 $P=AB\cap CD$,$Q=AD\cap BC$,$R=AC\cap BD$,那么 O 是 $\triangle PQR$ 的垂心.

2.3.5　圆的几何

定理 2.77　(Pascal(帕斯卡)定理)如果 A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3 是圆 γ 上不同的点,那么点 $X_1=A_2B_3\cap A_3B_2$,$X_2=A_1B_3\cap A_3B_1$ 和 $X_3=A_1B_2\cap A_2B_1$ 是共线的. 在 γ 是两条直线的特殊情况下,这一结果称为 Pappus(帕普斯)定理.

定理 2.78　(Brianchon(布里安桑)定理)设 $ABCDEF$ 是任意圆内接凸六边形,那么 AD,BE 和 CF 交于一点.

定理 2.79　(蝴蝶定理)设 AB 是圆 k 上的一条线段,C 是它的中点. 设 p 和 q 是通过 C 的两条不同的直线,分别与圆 k 在 AB 的一侧交于 P 和 Q,而在另一侧交于 P' 和 Q',设 E 和 F 分别是 PQ' 和 $P'Q$ 与 AB 的交点,那么 $CE=CF$.

定义 2.80　点 X 关于圆 $k(O,r)$ 的幂定义为 $P(X)=OX^2-r^2$. 设 l 是任一条通过 X 并交圆 k 于 A 和 B 的线(当 l 是切线时,$A=B$),有 $P(X)=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}$.

定义 2.81　两个圆的根轴是关于这两个圆的幂相同的点的轨迹. 圆 $k_1(O_1,r_1)$ 和 $k_2(O_2,r_2)$ 的根轴垂直于 O_1O_2. 三个不同的圆的根轴是共点的或互相平行的. 如果根轴是共点的,则它们的交点称为根心.

定义 2.82　一条不通过点 O 的直线 l 关于圆 $k(O,r)$ 的极点是一个位于 l 的与 O 相反一侧的使得 $OA\perp l$,且 $d(O,l)\cdot OA=r^2$ 的点 A. 特别,如果 l 和 k 交于两点,则它的极点就是过这两个点的切线的交点.

定义 2.83　用上面的定义中的记号,称点 A 的极线是 l,特别,如果 A 是 k 外面的一点,而 AM,AN 是 k 的切线($M,N\in k$),那么 MN 就是 A 的极线.

可以对一般的圆锥曲线类似的定义极点和极线的概念.

定理 2.84　如果点 A 属于点 B 的极线,则点 B 也属于点 A 的极线.

2.3.6　反演

定义 2.85　一个平面 π 围绕圆 $k(O,r)$(圆属于 π)的反演是一个从集合 $\pi\backslash\{O\}$ 到自身的变换,它把每个点 P 变为一个在 $\pi\backslash\{O\}$ 上使得 $OP\cdot OP'=r^2$ 的点. 在下面的叙述中,我们将默认排除点 O.

定理 2.86　在反演下,圆 k 上的点不动,圆内的点变为圆外的点,反之亦然.

定理 2.87　如果 A,B 两点在反演下变为 A',B' 两点,那么 $\angle OAB=\angle OB'A'$,$ABB'A'$ 共圆且此圆垂直于 k. 一个垂直于 k 的圆变为自身,反演保持连续曲线(包括直线和圆)之间的角度不变.

定理 2.88　反演把一条不包含 O 的直线变为一个包含 O 的圆,包含 O 的直线变成自身. 不包含 O 的圆变为不包含 O 的圆,包含 O 的圆变为不包含 O 的直线.

2.3.7 几何不等式

定理 2.89 （三角不等式）对平面上的任意三个点 A,B,C

$$AB + BC \geqslant AC$$

当等号成立时 A,B,C 共线，且按照这一次序从左到右排列时，等号成立.

定理 2.90 （Ptolemy(托勒玫) 不等式）对任意四个点 A,B,C,D 成立

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

定理 2.91 （平行四边形不等式）对任意四个点 A,B,C,D 成立

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2$$

当且仅当 $ABCD$ 是一个平行四边形时等号成立.

定理 2.92 如果 $\triangle ABC$ 的所有的角都小于或等于120°时，那么当 X 是 Torricelli(托里拆利) 点时，$AX + BX + CX$ 最小，在相反的情况下，X 是钝角的顶点. 使得 $AX^2 + BX^2 + CX^2$ 最小的点 X_2 是重心（见 Leibniz(莱布尼兹) 定理）.

定理 2.93 （Erdös-Mordell(爱尔多斯－摩德尔) 不等式）. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，而 P 在 BC,AC,AB 上的投影分别是 X,Y,Z，那么

$$PA + PB + PC \geqslant 2(PX + PY + PZ)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 是等边三角形以及 P 是其中心时等号成立.

2.3.8 三角

定义 2.94 三角圆是圆心在坐标平面的原点的单位圆. 设 A 是点(1,0) 而 $P(x,y)$ 是三角圆上使得 $\angle AOP = \alpha$ 的点. 那么我们定义

$$\sin\alpha = y, \cos\alpha = x, \tan\alpha = \frac{y}{x}, \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

定理 2.95 函数 sin 和 cos 是周期为 2π 的周期函数，函数 tan 和 cot 是周期为 π 的周期函数，成立以下简单公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin 0 = \sin\pi = 0$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

从这些公式易于导出其他的公式.

定理 2.96 对三角函数成立以下加法公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

定理 2.97 对三角函数成立以下倍角公式

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$
$$\cos 2x=2\cos^2 x-1,\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$
$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

定理 2.98　对任意 $x\in\mathbf{R}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,其中 $t=\tan\frac{x}{2}$.

定理 2.99　积化和差公式

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

定理 2.100　三角形的角 α,β,γ 满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$
$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

定理 2.101　(De Moivre(棣(译者注:音立) 模佛公式)

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$.

2.3.9　几何公式

定理 2.102　(Heron(海伦) 公式) 设三角形的边长为 a,b,c,半周长为 s,则它的面积可用这些量表成

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$$

定理 2.103　(正弦定理) 三角形的边 a,b,c 和角 α,β,γ 满足

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

定理 2.104　(余弦定理) 三角形的边和角满足

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

定理 2.105　$\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 和内切圆半径 r 满足

$$R=\frac{abc}{4S}$$

和
$$r=\frac{2S}{a+b+c}=R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)$$

如果 x,y,z 表示一个锐角三角形的外心到各边的距离,则

$$x+y+z=R+r$$

定理 2.106　(Euler(欧拉) 公式) 设 O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心,则

$$OI^2=R(R-2r)$$

其中 R 和 r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径,因此 $R\geqslant 2r$.

定理 2.107　设四边形的边长为 a,b,c,d,半周长为 p,在顶点 A,C 处的内角分别为 α, γ,则其面积为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

如果 $ABCD$ 是共圆的,则上述公式成为

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

定理 2.108 (pedal(匹多)三角形的 Euler(欧拉)定理)设 X,Y,Z 是从点 P 向 $\triangle ABC$ 的各边所引的垂足.又设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心,R 是其半径,则

$$S_{\triangle XYZ}=\frac{1}{4}\left|1-\frac{OP^2}{R^2}\right|S_{\triangle ABC}$$

此外,当且仅当 P 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆(见 Simson(西姆松)线)上时,$S_{\triangle XYZ}=0$.

定理 2.109 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 是坐标空间中的三个向量,那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1b_2-a_2b_1,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3)$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\left|\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\right|$$

定理 2.110 $\triangle ABC$ 的面积和四面体 $ABCD$ 的体积分别等于

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

和

$$|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|$$

定理 2.111 (Cavalieri(卡瓦列里)原理)如果两个立体被同一个平面所截的截面的面积总是相等的,则这两个立体的体积相等.

第4节 数 论

2.4.1 可除性和同余

定义 2.112 $a,b\in\mathbf{N}$ 的最大公因数 $(a,b)=\gcd(a,b)$ 是可以整除 a 和 b 的最大整数.如果 $(a,b)=1$,则称正整数 a 和 b 是互素的.$a,b\in\mathbf{N}$ 的最小公倍数 $[a,b]=\operatorname{lcm}(a,b)$ 是可以被 a 和 b 整除的最小整数.成立

$$[a,b](a,b)=ab$$

上面的概念容易推广到两个数以上的情况,即我们也可以定义 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

定理 2.113 (Euclid(欧几里得)算法)由于 $(a,b)=(|a-b|,a)=(|a-b|,b)$,由此通过每次把 a 和 b 换成 $|a-b|$ 和 $\min\{a,b\}$ 而得出一条从正整数 a 和 b 获得 (a,b) 的链,直到最后两个数成为相等的数.这一算法可被推广到两个数以上的情况.

定理 2.114 (Euclid(欧几里得)算法的推论)对每对 $a,b\in\mathbf{N}$,存在 $x,y\in\mathbf{Z}$ 使得 $ax+by=(a,b)$,(a,b) 是使得这个式子成立的最小正整数.

定理 2.115 (Euclid(欧几里得)算法的第二个推论)设 $a,m,n\in\mathbf{N}$,$a>1$,则成立

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1$$

定理 2.116 (算数基本定理)每个正整数当不计素数的次序时都可以用唯一的方式被表成素数的乘积.

定理 2.117 算数基本定理对某些其他的数环也成立,例如 $\mathbf{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbf{Z}[\omega]$(其中 ω 是 1 的 3 次复根).在这些情况下,因数分解当不计次序和 1 的因子时是唯一的.

定义 2.118 称整数 a,b 在模 n 下同余,如果 $n\mid a-b$,我们把这一事实记为 $a\equiv b\pmod n$.

定理 2.119 (中国剩余定理)如果 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是两两互素的正整数,而 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 是使得 $(a_i,m_i)=1(i=1,2,\cdots,k)$ 的整数,那么同余式组

$$a_ix\equiv c_i\pmod{m_i}, i=1,2,\cdots,k$$

在模 $m_1m_2\cdots m_k$ 下有唯一解.

2.4.2 指数同余

定理 2.120 (Wilson(威尔逊)定理)如果 p 是素数,则 $p\mid(p-1)!+1$.

定理 2.121 (Fermat(费尔马)小定理)设 p 是一个素数,而 a 是一个使得 $(a,p)=1$ 的整数,则

$$a^{p-1}\equiv 1\pmod p$$

这个定理是 Euler(欧拉)定理的特殊情况.

定义 2.122 对 $n\in\mathbf{N}$,定义 Euler(欧拉)函数是在所有小于 n 的整数中与 n 互素的整数的个数.成立以下公式

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

其中 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的素因子分解式.

定理 2.113 (Euler(欧拉)定理)设 n 是自然数,而 a 是一个使得 $(a,n)=1$ 的整数,那么

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1\pmod n$$

定理 2.114 (元根的存在性)设 p 是一个素数,则存在一个 $g\in\{1,2,\cdots p-1\}$(称为模 p 的元根)使得在模 p 下,集合 $\{1,g,g^2,\cdots,g^{p-2}\}$ 与集合 $\{1,2,\cdots p-1\}$ 重合.

定义 2.115 设 p 是一个素数,而 α 是一个非负整数,称 p^α 是 p 的可整除 a 的恰好的幂(而 α 是一个恰好的指数),如果 $p^\alpha\mid a$,而 $p^{\alpha+1}\mid a$.

定理 2.16 设 a,n 是正整数,而 p 是一个奇素数,如果 $p^\alpha(\alpha\in\mathbf{N})$ 是 p 的可整除 $a-1$ 的恰好的幂,那么对任意整数 $\beta\geqslant 0$,当且仅当 $p^\beta\mid n$ 时,$p^{\alpha+\beta}\mid a^n-1$(见 SL1997—14).

对 $p=2$ 成立类似的命题.如果 $2^\alpha(\alpha\in\mathbf{N})$ 是 p 的可整除 a^2-1 的恰好的幂,那么对任意整数 $\beta\geqslant 0$,当且仅当 $2^{\beta+1}\mid n$ 时,$2^{\alpha+\beta}\mid a^n-1$(见 SL1989—27).

2.4.2 二次 Diophantine(丢番图)方程

定理 2.127 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解由 $a=t(m^2-n^2)$, $b=2tmn$, $c=t(m^2+n^2)$ 给出(假设 b 是偶数),其中 $t,m,n\in\mathbf{Z}$.三元组 (a,b,c) 称为毕达哥拉斯数(译者注:在我国称为勾股数)(如果 $(a,b,c)=1$,则称为本原的毕达哥拉斯数(勾股数)).

定义 2.128　设 $D\in\mathbf{N}$ 是一个非完全平方数,则称不定方程

$$x^2-Dy^2=1$$

是 Pell(贝尔) 方程,其中 $x,y\in\mathbf{Z}$.

定理 2.129　如果(x_0,y_0)是 Pell(贝尔) 方程 $x^2-Dy^2=1$ 在 $\mathbf{N}$ 中的最小解,则其所有的整数解(x,y)由 $x+y\sqrt{D}=\pm(x_0+y_0\sqrt{D})^n,n\in\mathbf{Z}$ 给出.

定义 2.130　整数 a 称为是模 p 的平方剩余,如果存在 $x\in\mathbf{Z}$,使得 $x^2\equiv a\pmod p$,否则称为模 p 的非平方剩余.

定义 2.131　对整数 a 和素数 p 定义 Legendre(勒让德) 符号为

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1,\text{ 如果 } a \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余,且 } p\mid a\\0,\text{ 如果 } p\mid a\\-1,\text{ 其他情况}\end{cases}$$

显然如果 $p\mid a$ 则

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a+p}{p}\right),\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$$

Legendre(勒让德) 符号是积性的,即

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)=\left(\frac{ab}{p}\right)$$

定理 2.132　(Euler(欧拉) 判据) 对奇素数 p 和不能被 p 整除的整数 a

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\pmod p$$

定理 2.133　对素数 $p>3$,$\left(\frac{-1}{p}\right)$,$\left(\frac{2}{p}\right)$ 和 $\left(\frac{-3}{p}\right)$ 等于 1 的充分必要条件分别为 $p\equiv 1\pmod 4$,$p\equiv\pm 1\pmod 8$ 和 $p\equiv 1\pmod 6$.

定理 2.134　(Gauss(高斯) 互反律) 对任意两个不同的奇素数 p 和 q,成立

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

定义 2.135　对整数 a 和奇的正整数 b,定义 Jacobi(雅可比) 符号如下

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$$

其中 $b=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 b 的素因子分解式.

定理 2.136　如果 $\left(\frac{a}{b}\right)=-1$,那么 a 是模 b 的非二次剩余,但是逆命题不成立. 对 Jacobi(雅可比) 符号来说,除了 Euler(欧拉) 判据之外,Legendre(勒让德) 符号的所有其余性质都保留成立.

2.4.4　Farey(法雷) 序列

定义 2.137　设 n 是任意正整数,Farey(法雷) 序列 F_n 是由满足 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant n$,$(a,b)=1$ 的所有从小到大排列的有理数 $\frac{a}{b}$ 所形成的序列. 例如 $F_3=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$.

定理 2.138　如果 $\frac{p_1}{q_1}$,$\frac{p_2}{q_2}$ 和 $\frac{p_3}{q_3}$ 是 Farey(法雷) 序列中三个相继的项,则

$$p_2q_1-p_1q_2=1$$
$$\frac{p_1+p_3}{q_1+q_3}=\frac{p_2}{q_2}$$

第5节　组　合

2.5.1　对象的计数

许多组合问题涉及对满足某种性质的集合中的对象计数，这些性质可以归结为以下概念的应用.

定义 2.139　k 个元素的阶为 n 的选排列是一个从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的映射. 对给定的 n 和 k，不同的选排列的数目是 $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

定义 2.140　k 个元素的阶为 n 的可重复的选排列是一个从 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意的映射. 对给定的 n 和 k，不同的可重复的选排列的数目是 $\overline{V}_n^k=k^n$.

定义 2.141　阶为 n 的全排列是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的一个一对一映射(即当 $k=n$ 时的选排列的特殊情况)，对给定的 n，不同的全排列的数目是 $P_n=n!$.

定义 2.142　k 个元素的阶为 n 的组合是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 k 元素的子集，对给定的 n 和 k，不同的组合数是 $C_n^k=\binom{n}{k}$.

定义 2.143　一个阶为 n 可重复的全排列是一个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 n 个元素的积集的一个一对一映射. 一个积集是一个其中的某些元素被允许是不可区分的集合，例如，$\{1,1,2,3\}$.

如果 $\{1,2,\cdots,s\}$ 表示积集中不同的元素组成的集合，并且在积集中元素 i 出现 α_i 次，那么不同的可重复的全排列的数目是

$$P_{n,\alpha_1,\cdots,\alpha_s}=\frac{n!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \cdots\alpha_s!}$$

组合是积集有两个不同元素的可重复的全排列的特殊情况.

定理 2.144　(鸽笼原理)如果把元素数目为 $kn+1$ 的集合分成 n 个互不相交的子集，则其中至少有一个子集至少要包含 $k+1$ 个元素.

定理 2.145　(容斥原理)设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是集合 S 的一族子集，那么 S 中那些不属于所给子集族的元素的数目由以下公式给出

$$|S\backslash(S_1\cup\cdots\cup S_n)|=|S|-\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^k|S_{i_1}\cap\cdots\cap S_{i_k}|$$

2.5.2　图论

定义 2.146　一个图 $G=(V,E)$ 是一个顶点 V 和 V 中某些元素对，即边的积集 E 所组成的集合. 对 $x,y\in V$，当 $(x,y)\in E$ 时，称顶点 x 和 y 被一条边所连接，或称这一对顶点是这条边的端点.

一个积集为 E 的图可归结为一个真集合(即其顶点至多被一条边所连接)，一个其中没

有一个定点是被自身所连接的图称为是一个真图.

有限图是一个$|E|$和$|V|$都有限的图.

定义 2.147　一个有向图是一个 E 中的有方向的图.

定义 2.148　一个包含了 n 个顶点并且每个顶点都有边与其连接的真图称为是一个完全图.

定义 2.149　k 分图(当 $k=2$ 时,称为 2－分图)$K_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 是那样一个图,其顶点 V 可分成k个非空的互不相交的,元素个数分别为$i_1,i_2,\cdots,i_k$的子集,使得V的子集W中的每个顶点 x 仅和不在 W 中的顶点相连接.

定义 2.150　顶点 x 的阶 $d(x)$ 是 x 作为一条边的端点的次数(那样,自连接的边中就要数两次). 孤立的顶点是阶为 0 的顶点.

定理 2.151　对图 $G=(V,E)$,成立等式

$$\sum_{x\in V}d(x)=2\mid E\mid$$

作为一个推论,有奇数阶的顶点的个数是偶数.

定义 2.152　图的一条路径是一个顶点的有限序列,使得其中每一个顶点都与其前一个顶点相连. 路径的长度是它通过的边的数目. 一条回路是一条终点与起点重合的路径. 一个环是一条在其中没有一个顶点出现两次(除了起点 / 终点之外) 的回路.

定义 2.153　图$G=(V,E)$ 的子图$G'=(V',E')$ 是那样一个图,在其中$V'\subset V$而E'仅包含 E 的连接 V' 中的点的边. 图的一个连通分支是一个连通的子图,其中没有一个顶点与此分之外的顶点相连.

定义 2.154　一个树是一个在其中没有环的连通图.

定理 2.155　一个有 n 个顶点的树恰有 $n-1$ 条边且至少有两个阶为 2 的顶点.

定义 2.156　Euler(欧拉) 路是其中每条边恰出现一次的路径. 与此类似,Euler(欧拉) 环是环形的 Euler(欧拉) 路.

定理 2.157　有限连通图 G 有一条 Euler(欧拉) 路的充分必要条件是:

(1) 如果每个顶点的阶数是偶数,那么 G 包含一条 Euler(欧拉) 环;

(2) 如果除了两个顶点之外,所有顶点的阶数都是偶数,那么 G 包含一条不是环路的 Euler(欧拉) 路(其起点和终点就是那两个奇数阶的顶点).

定义 2.158　Hamilton(哈密尔顿) 环是一个图 G 的每个顶点恰被包含一次的回路(一个平凡的事实是,这个回路也是一个环).

目前还没有发现判定一个图是否是 Hamilton(哈密尔顿) 环的简单法则.

定理 2.159　设G是一个有n个顶点的图,如果G的任何两个不相邻顶点的阶数之和都大于 n,则 G 有一个 Hamilton(哈密尔顿) 回路.

定理 2.160　(Ramsey(雷姆塞) 定理) 设 $r\geqslant 1$ 而 $q_1,q_2,\cdots,q_s\geqslant r$. 如果 K_n 的所有子图 K_r 都分成了 s 个不同的集合,记为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,那么存在一个最小的正整数 $N(q_1,q_2,\cdots,q_s;r)$ 使得当 $n>N$ 时,对某个 i,存在一个 K_{q_i} 的完全子图,它的子图 K_r 都属于 A_i. 对 $r=2$,这对应于把 K_n 的边用s 种不同的颜色染色,并寻求子图 K_{q_i} 的第i 种颜色的单色子图[73].

定理 2.161　利用上面定理的记号,有

$$N(p,q;r) \leqslant N(N(p-1,q;r),N(p,q-1;r);r-1)+1$$

特别

$$N(p,q,2) \leqslant N(p-1,q;2)+N(p,q-1;2)$$

已知 N 的以下值

$$N(p,q;1)=p+q-1$$

$$N(2,p;2)=p$$

$$N(3,3;2)=6,N(3,4;2)=9,N(3,5;2)=14,N(3,6;2)=18$$

$$N(3,7;2)=23,N(3,8;2)=28,N(3,9;2)=36$$

$$N(4,4;2)=18,N(4,5;2)=25$$ [73]

定理 2.162 (Turan(图灵)定理) 如果一个有 $n=t(p-1)+r$ 个顶点的简单图的边多于 $f(n,p)$ 条,其中 $f(n,p)=\dfrac{(p-1)n^2-r(p-1-r)}{2(p-1)}$,那么它包含子图 K_p. 有 $f(n,p)$ 个顶点而不含 K_p 的图是一个完全的多重图,它有 r 个元素个数为 $t+1$ 的子集和 $p-1-r$ 个元素个数为 t 的子集[73].

定义 2.163 平面图是一个可被嵌入一个平面的图,使得它的顶点可用平面上的点表示,而边可用平面上连接顶点的线(不一定是直的)来表示,而各边互不相交.

定理 2.164 一个有 n 个顶点的平面图至多有 $3n-6$ 条边.

定理 2.165 (Kuratowski(库拉托夫斯基)定理)K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是平面图. 每个非平面图都包含一个和这两个图之一同胚的子图.

定理 2.166 (Euler(欧拉公式)) 设 E 是凸多面体的边数,F 是它的面数,而 V 是它的顶点数,则

$$E+2=F+V$$

对平面图成立同样的公式(这时 F 代表平面图中的区域数).

参考文献

[1] 洛桑斯基 E，鲁索 C. 制胜数学奥林匹克[M]. 候文华，张连芳，译. 刘嘉焜，校. 北京：科学出版社，2003.

[2] 王向东，苏化明，王方汉. 不等式·理论·方法[M]. 郑州：河南教育出版社，1994.

[3] 中国科协青少年工作部，中国数学会. 1978～1986 年国际奥林匹克数学竞赛题及解答[M]. 北京：科学普及出版社，1989.

[4] 单墫，等. 数学奥林匹克竞赛题解精编[M]. 南京：南京大学出版社；上海：学林出版社，2001.

[5] 顾可敬. 1979～1980 中学国际数学竞赛题解[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1981.

[6] 顾可敬. 1981 年国内外数学竞赛题解选集[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1982.

[7] 石华，卫成. 80 年代国际中学生数学竞赛试题详解[M]. 长沙：湖南教育出版社，1990.

[8] 梅向明. 国际数学奥林匹克 30 年[M]. 北京：中国计量出版社，1989.

[9] 单墫，葛军. 国际数学竞赛解题方法[M]. 北京：中国少年儿童出版社，1990.

[10] 丁石孙. 乘电梯·翻硬币·游迷宫·下象棋[M]. 北京：北京大学出版社，1993.

[11] 丁石孙. 登山·赝币·红绿灯[M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[12] 黄宣国. 数学奥林匹克大集[M]. 上海：上海教育出版社，1997.

[13] 常庚哲. 国际数学奥林匹克三十年[M]. 北京：中国展望出版社，1989.

[14] 丁石孙. 归纳·递推·无字证明·坐标·复数[M]. 北京：北京大学出版社，1995.

[15] 裘宗沪. 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2005.

[16] 裘宗沪. 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2004.

[17] 数学奥林匹克工作室. 最新竞赛试题选编及解析(高中数学卷)[M]. 北京：首都师范大学出版社，2001.

[18] 第 31 届 IMO 选题委员会. 第 31 届国际数学奥林匹克试题、备选题及解答[M]. 济南：山东教育出版社，1990.

[19] 常庚哲. 数学竞赛(2)[M]. 长沙：湖南教育出版社，1989.

[20] 常庚哲. 数学竞赛(20)[M]. 长沙：湖南教育出版社，1994.

[21] 杨森茂，陈圣德. 第一届至第二十二届国际中学生数学竞赛题解[M]. 福州：福建科学技术出版社，1983.

[22] 江苏师范学院数学系. 国际数学奥林匹克[M]. 南京：江苏科学技术出版社，1980.

[23] 恩格尔 A. 解决问题的策略[M]. 舒五昌，冯志刚，译. 上海：上海教育出版社，2005.

[24] 王连笑. 解数学竞赛题的常用策略[M]. 上海：上海教育出版社，2005.

[25] 江仁俊，应成璟，蔡训武. 国际数学竞赛试题讲解[M]. 武汉：湖北人民出版社，1980.

[26] 单墫. 第二十五届国际数学竞赛[J]. 数学通讯，1985(3).

[27] 付玉章. 第二十九届 IMO 试题及解答[J]. 中学数学，1988(10).

[28] 苏亚贵.正则组合包含连续自然数的个数[J].数学通报,1982(8).
[29] 王根章.一道 IMO 试题的嵌入证法[J].中学数学教学.1999(5).
[30] 舒五昌.第 37 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1996(5).
[31] 杨卫平,王卫华.第 42 届 IMO 第 2 题的再探究[J].中学数学研究,2005(5).
[32] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).
[33] 周金峰,谷焕春.IMO 42－2的进一步推广[J].数学通讯,2004(9).
[34] 魏维.第 42 届国际数学奥林匹克试题解答集锦[J].中学数学,2002(2).
[35] 程华.42 届 IMO 两道几何题另解[J].福建中学数学,2001(6).
[36] 张国清.第 39 届 IMO 试题第一题充分性的证明[J].中等数学,1999(2).
[37] 傅善林.第 42 届 IMO 第五题的推广[J].中等数学,2003(6).
[38] 龚浩生,宋庆.IMO 42－2的推广[J].中学数学,2002(1).
[39] 厉倩.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学研究,2002(10).
[40] 邹明.第 40 届 IMO 一赛题的简解[J].中等数学,2001(3).
[41] 许以超.第 39 届国际数学奥林匹克试题及解答[J].数学通报,1999(3).
[42] 余茂迪,宫宋家.用解析法巧解一道 IMO 试题[J].中学数学教学,1997(4).
[43] 宋庆.IMO5－5 的推广[J].中学数学教学,1997(5).
[44] 余世平.从 IMO 试题谈公式 $C_{2n}^{n}=\sum_{i=0}^{n}(C_{n}^{i})^{2}$ 之应用[J].数学通讯,1997(12).
[45] 徐彦明.第 42 届 IMO 第 2 题的另一种推广[J].中学教研(数学),2002(10).
[46] 张伟军.第 41 届 IMO 两赛题的证明与评注[J].中学数学月刊,2000(11).
[47] 许静,孔令恩.第 41 届 IMO 第 6 题的解析证法[J].数学通讯,2001(7).
[48] 魏亚清.一道 IMO 赛题的九种证法[J].中学教研(数学),2002(6).
[49] 陈四川.IMO－38 试题 2 的纯几何解法[J].福建中学数学,1997(6).
[50] 常庚哲,单墫,程龙.第二十二届国际数学竞赛试题及解答[J].数学通报,1981(9).
[51] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).
[52] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).
[53] 罗增儒.IMO 42－2的探索过程[J].中学数学教学参考,2002(7).
[54] 嵇仲韶.第 39 届 IMO 一道预选题的推广[J].中学数学杂志(高中),1999(6).
[55] 王杰.第 40 届 IMO 试题解答[J].中等数学,1999(5).
[56] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(上)[J].数学通报,1997(2).
[57] 舒五昌.第三十七届 IMO 试题及解答(下)[J].数学通报,1997(3).
[58] 黄志全.一道 IMO 试题的纯平几证法研究[J].数学教学通讯,2000(5).
[59] 段智毅,秦永.IMO－41 第 2 题另证[J].中学数学教学参考,2000(11).
[60] 杨仁宽.一道 IMO 试题的简证[J].数学教学通讯,1998(3).
[61] 相生亚,裘良.第 42 届 IMO 试题第 2 题的推广、证明及其它[J].中学数学研究,2002(2).
[62] 熊斌.第 46 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2005(9).
[63] 谢峰,谢宏华.第 34 届 IMO 第 2 题的解答与推广[J].中等数学,1994(1).
[64] 熊斌,冯志刚.第 39 届国际数学奥林匹克[J].数学通讯,1998(12).

[65] 朱恒杰.一道 IMO 试题的推广[J].中学数学杂志,1996(4).
[66] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(I)[J].湖南数学通讯,1998(5).
[67] 肖果能,袁平之.第 39 届 IMO 一道试题的研究(Ⅱ)[J].湖南数学通讯,1998(6).
[68] 杨克昌.一个数列不等式——IMO23－3 的推广[J].湖南数学通讯,1998(3).
[69] 吴长明,胡根宝.一道第 40 届 IMO 试题的探究[J].中学数学研究,2000(6).
[70] 仲翔.第二十六届国际数学奥林匹克(续)[J].数学通讯,1985(11).
[71] 程善明.一道 IMO 赛题的纯几何证法与推广[J].中学数学教学,1998(4).
[72] 刘元树.一道 IMO 试题解法的再探讨[J].中学数学研究,1998(12).
[73] 刘连顺,仝瑞平.一道 IMO 试题解法新探[J].中学数学研究,1998(8).
[74] 王凤春.一道 IMO 试题的简证[J].中学数学研究,1998(10).
[75] 李长明.一道 IMO 试题的背景及证法讨论[J].中学数学教学,2000(1).
[76] 方廷刚.综合法简证一道 IMO 预选题[J].中学生数学,1999(2).
[77] 吴伟朝.对函数方程 $f(x^l\cdot f^{[m]}(y)+x^n)=x^l\cdot y+f^n(x)$ 的研究[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(22).长沙:湖南教育出版社,1994.
[78] 湘普.第 31 届国际数学奥林匹克试题解答[M]//湖南教育出版社编.数学竞赛(6～9).长沙:湖南教育出版社,1991.
[79] 陈永高.第 45 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2004(5).
[80] 程俊.一道 IMO 试题的推广及简证[J].中等数学,2004(5).
[81] 蒋茂森.$2k$ 阶银矩阵的存在性和构造法[J].中等数学,1998(3).
[82] 单墫.散步问题与银矩阵[J].中等数学,1999(3).
[83] 张必胜. 初等数论在 IMO 中应用研究[D].西安:西北大学研究生院,2010.
[84] 刘宝成,刘卫利. 国际奥林匹克数学竞赛题与费马小定理[J] .河北北方学院学报;自然科学版, 2008,24(1):13-15,20.
[85] 卓成海. 抓住“关键” 把握“异同”——对一道国际奥赛题的再探究[J].中学数学(高中版),2013(11):77-78.
[86] 李耀文. 均值代换在解竞赛题中的应用[J]. 中等数学,2010(8) :2-5.
[87] 吴军. 妙用广义权方和不等式证明 IMO 试题[J]. 数理化解体研究(高中版),2014(8).16.
[88] 王庆金. 一道 IMO 平面几何题溯源[J]. 中学数学研究,2014(1):50.
[89] 秦建华. 一道 IMO 试题的另解与探究[J]. 中学教学参考,2014(8):40.
[90] 张上伟,陈华梅,吴康. 一道取整函数 IMO 试题的推广[J]. 中学数学研究(华南师范大学版),2013(23) :42-43
[91] 尹广金. 一道美国数学奥林匹克试题的引伸[J].中学数学研究,2013(11) :50.
[92] 熊斌,李秋生. 第 54 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2013(9) :20-27.
[93] 杨同伟. 一道 IMO 试题的向量解法及推广[J]. 中学生数学,2012(23) :30.
[94] 李凤清,徐志军. 第 42 届 IMO 第二题的证明与加强[J] 四川职业技术学院学报,2012(5) :153-154.
[95] 熊斌. 第 52 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2011(9) :16-20.
[96] 董志明. 多元变量 局部调整——一道 IMO 试题的新解与推广[J].中等数学,

2011(9):96-98.
[97] 李建潮. 一道 IMO 试题的再加强与猜想的加强[J]. 河北理科教学研究,2011(1):43-44.
[98] 边欣. 一道 IMO 试题的加强[J]. 数学通讯,2012(22):59-60.
[99] 郑日锋. 一个优美不等式与一道 IMO 试题同出一辙[J] 中等数学,2011(3):18-19.
[100] 李建潮. 一道 IMO 试题的再加强与猜想的加强[J] 河北理科教学研究,2011(1):43-44.
[101] 李长朴. 一道国际数学奥林匹克试题的拓展[J]. 数学学习与研究,2010(23):95.
[102] 李歆. 对一道 IMO 试题的探究[J]. 数学教学,2010(11):47-48.
[103] 王淼生. 对一道 IMO 试题猜想的再加强及证明[J]. 福建中学数学,2010(10):48.
[104] 郝志刚.一道国际数学竞赛题的探究[J]. 数学通讯,2010(Z2):117-118.
[105] 王业和. 一道 IMO 试题的证明与推广[J]. 中学教研(数学),2010(10):46-47.
[106] 张蕾. 一道 IMO 试题的商榷与猜想[J]. 青春岁月,2010(18):121.
[107] 张俊. 一道 IMO 试题的又一漂亮推广[J]. 中学数学月刊,2010(8):43.
[108] 秦庆雄,范花妹. 一道第 42 届 IMO 试题加强的另一简证[J]. 数学通讯,2010(14):59.
[109] 李建潮. 一道 IMO 试题的引申与瓦西列夫不等式[J] 河北理科教学研究,2010(3):1-3.
[110] 边欣. 一道第 46 届 IMO 试题的加强[J]. 数学教学,2010(5):41-43.
[111] 杨万芳. 对一道 IMO 试题的探究[J] 福建中学数学,2010(4):49.
[112] 熊睿. 对一道 IMO 试题的探究[J]. 中等数学,2010(4):23.
[113] 徐国辉,舒红霞. 一道第 42 届 IMO 试题的再加强[J]. 数学通讯,2010(8):61.
[114] 周峻民,郑慧娟. 一道 IMO 试题的证明及其推广[J]. 中学教研(数学),2011(12):41-43.
[115] 陈鸿斌. 一道 IMO 试题的加强与推广[J]. 中学数学研究,2011(11):49-50.
[116] 袁安全. 一道 IMO 试题的巧证[J]. 中学生数学,2010(8):35.
[117] 边欣. 一道第 50 届 IMO 试题的探究[J]. 数学教学,2010(3):10-12.
[118] 陈智国.关于 IMO25-1 的推广[J]. 人力资源管理,2010(2):112-113.
[119] 薛相林. 一道 IMO 试题的类比拓广及简解[J].中学数学研究,2010(1):49.
[120] 王增强. 一道第 42 届 IMO 试题加强的简证[J].数学通讯,2010(2):61.
[121] 邵广钱.一道 IMO 试题的另解[J].中学数学月刊,2009(10):43-44.
[122] 侯典峰.一道 IMO 试题的加强与推广[J] 中学数学,2009(23):22-23.
[123] 朱华伟,付云皓. 第 50 届 IMO 试题解答[J].中等数学,2009(9):18-21.
[124] 边欣.一道 IMO 试题的推广及简证[J]. 数学教学,2009(9):27,29.
[125] 朱华伟.第 50 届 IMO 试题[J]. 中等数学,2009(8):50.
[126] 刘凯峰,龚浩生.一道 IMO 试题的隔离与推广[J]. 中等数学,2009(7):19-20.
[127] 宋庆.一道第 42 届 IMO 试题的加强[J]. 数学通讯,2009(10):43.
[128] 李建潮.偶得一道 IMO 试题的指数推广[J]. 数学通讯,2009(10):44.
[129] 吴立宝,李长会. 一道 IMO 竞赛试题的证明[J]. 数学教学通讯,2009(12):64.

[130] 徐章韬. 一道30届IMO试题的别解[J]. 中学数学杂志,2009(3):45.
[131] 张俊.一道IMO试题引发的探索[J]. 数学通讯,2009(4):31.
[132] 曹程锦. 一道第49届IMO试题的解题分析[J]. 数学通讯,2008(23):41.
[133] 刘松华,孙明辉,刘凯年. “化蝶”——一道IMO试题证明的探索[J]. 中学数学杂志,2008(12):54-55.
[134] 安振平.两道数学竞赛试题的链接[J]. 中小学数学(高中版),2008(10):45.
[135] 李建潮. 一道IMO试题引发的思索[J]. 中小学数学(高中版),2008(9):44-45.
[136] 熊斌,冯志刚. 第49届IMO试题解答[J] 中等数学,2008(9):封底.
[137] 边欣.一道IMO试题结果的加强及应用[J]. 中学数学月刊,2008(9):29-30.
[138] 熊斌,冯志刚. 第49届IMO试题[J] 中等数学,2008(8):封底.
[139] 沈毅.一道IMO试题的推广[J]. 中学数学月刊,2008(8):49.
[140] 令标.一道48届IMO试题引申的别证[J]. 中学数学杂志,2008(8):44-45.
[141] 吕建恒.第48届IMO试题4的简证[J]. 中学数学月刊,2008(7):40.
[142] 熊光汉. 对一道IMO试题的探究[J]. 中学数学杂志,2008(6):56.
[143] 沈毅,罗元建. 对一道IMO赛题的探析[J]. 中学教研(数学),2008(5):42-43
[144] 厉倩.两道IMO试题探秘[J] 数理天地(高中版), 2008(4):21-22.
[145] 徐章韬.从方差的角度解析一道IMO试题[J]. 中学数学杂志,2008(3):29.
[146] 令标.一道IMO试题的别证[J].中学数学教学,2008(2):63-64.
[147] 李耀文.一道IMO试题的别证[J]. 中学数学月刊,2008(2):52.
[148] 张伟新.一道IMO试题的两种纯几何解法[J]. 中学数学月刊,2007(11):48.
[149] 朱华伟.第48届IMO试题解答[J]. 中等数学,2007(9):20-22.
[150] 朱华伟.第48届IMO试题 [J]. 中等数学,2007(8):封底.
[151] 边欣.一道IMO试题结果的加强[J]. 数学教学,2007(3):49.
[152] 丁兴春. 一道IMO试题的推广[J]. 中学数学研究,2006(10):49-50.
[153] 李胜宏.第47届IMO试题解答[J].中等数学,2006(9):22-24.
[154] 李胜宏.第47届IMO试题 [J].中等数学,2006(8):封底.
[155] 傅启铭.一道美国IMO试题变形后的推广[J]. 遵义师范学院学报,2006(1):74-75.
[156] 熊斌.第46届IMO试题[J] 中等数学,2005(8):50.
[157] 文开庭.一道IMO赛题的新隔离推广及其应用[J] .毕节师范高等专科学校学报(综合版), 2005(2):59-62.
[158] 熊斌,李建泉. 第53届IMO预选题(四)[J].中等数学,2013(12):21-25.
[159] 熊斌,李建泉. 第53届IMO预选题(三)[J].中等数学,2013(11):22-27.
[160] 熊斌,李建泉. 第53届IMO预选题(二)[J].中等数学,2013(10):18-23
[161] 熊斌,李建泉. 第53届IMO预选题(一)[J].中等数学,2013(9):28-32.
[162] 王建荣,王旭. 简证一道IMO预选题[J].中等数学,2012(2):16-17.
[163] 熊斌,李建泉. 第52届IMO预选题(四) [J].中等数学,2012(12):18-22.
[164] 熊斌,李建泉. 第52届IMO预选题(三) [J].中等数学,2012(11):18-22.
[165] 李建泉. 第51届IMO预选题(四) [J].中等数学,2011(11):17-20.
[166] 李建泉. 第51届IMO预选题(三) [J].中等数学,2011(10):16-19.

[167] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2011(9):20-27.
[168] 李建泉. 第 51 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2011(8):17-20.
[169] 高凯. 浅析一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(3):16-18.
[170] 娄姗姗. 利用等价形式证明一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(1):13,封底.
[171] 李奋平. 从最小数入手证明一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,2011(1):14.
[172] 李赛. 一道 IMO 预选题的另证[J]. 中等数学,2011(1):15.
[173] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2010(11):19-22.
[174] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2010(10):19-22.
[175] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2010(9):21-27.
[176] 李建泉. 第 50 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2010(8):19-22.
[177] 沈毅. 一道 49 届 IMO 预选题的推广[J]. 中学数学月刊,2010(04):45.
[178] 宋强. 一道第 47 届 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2009(11):12.
[179] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2009(11):19-23.
[180] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2009(10):19-23.
[181] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2009(9):22-25.
[182] 李建泉. 第 49 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2009(8):18-22.
[183] 李慧,郭璋. 一道 IMO 预选题的证明与推广[J]. 数学通讯,2009(22):45-47.
[184] 杨学枝. 一道 IMO 预选题的拓展与推广[J]. 中等数学,2009(7):18-19.
[185] 吴光耀,李世杰. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 上海中学数学,2009(05):48.
[186] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(四) [J]. 中等数学,2008(11):18-24.
[187] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(三) [J]. 中等数学,2008(10):18-23.
[188] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(二) [J]. 中等数学,2008(9):21-24.
[189] 李建泉. 第 48 届 IMO 预选题(一) [J]. 中等数学,2008(8):22-26.
[190] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探讨[J]. 中等数学,2007(9):46-48.
[191] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2007(11):17-22.
[192] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2007(10):18-23.
[193] 李建泉. 第 47 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2007(9):24-27.
[194] 沈毅. 一道 IMO 预选题的再探索[J]. 中学数学教学,2008(1):58-60.
[195] 刘才华. 一道 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2007(8):24.
[196] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探讨[J]. 中等数学,2007(9):19-20.
[197] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2006(11):19-24.
[198] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2006(10):22-25.
[199] 李建泉. 第 46 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2006(9):25-28.
[200] 贯福春. 吴娃双舞醉芙蓉——一道 IMO 预选题赏析[J]. 中学生数学,2006(18):21,18.
[201] 杨学枝. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2006(5):17.
[202] 邹宇,沈文选. 一道 IMO 预选题的再推广[J]. 中学数学研究,2006(4):49-50.
[203] 苏炜杰. 一道 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,2006(2):21.
[204] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2005(11):28-30.

[205] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2005(10):32-36.
[206] 李建泉. 第 45 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2005(9):23-29.
[207] 苏化明. 一道 IMO 预选题的探索[J]. 中等数学,2005(9):9-10.
[208] 谷焕春,周金峰. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2005(2):20.
[209] 李建泉. 第 44 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2004(6):25-30.
[210] 李建泉. 第 44 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2004(5):27-32.
[211] 方廷刚. 复数法简证一道 IMO 预选题[J]. 中学数学月刊,2004(11):42.
[212] 李建泉. 第 43 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2003(6):28-30.
[213] 李建泉. 第 43 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2003(5):25-31.
[214] 孙毅. 一道 IMO 预选题的简解[J]. 中等数学,2003(5):19.
[215] 宿晓阳. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中学数学月刊,2002(12):40.
[216] 李建泉. 第 42 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2002(6):32-36.
[217] 李建泉. 第 42 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2002(5):24-29.
[218] 宋庆,黄伟民. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2002(6):43.
[219] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2002(1):33-39.
[220] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2001(6):34-37.
[221] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2001(5):32-36.
[222] 方廷刚. 一道 IMO 预选题再解[J]. 中学数学月刊,2002(05):43.
[223] 蒋太煌. 第 39 届 IMO 预选题 8 的简证[J]. 中等数学,2001(5):22-23.
[224] 张赟. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,2001(2):26.
[225] 林运成. 第 39 届 IMO 预选题 8 别证[J]. 中等数学,2001(1):22.
[226] 李建泉. 第 40 届 IMO 预选题(上) [J]. 中等数学,2000(5):33-36.
[227] 李建泉. 第 40 届 IMO 预选题(中) [J]. 中等数学,2000(6):35-37.
[228] 李建泉. 第 41 届 IMO 预选题(下) [J]. 中等数学,2001(1):35-39.
[229] 李来敏. 一道 IMO 预选题的三种初等证法及推广[J]. 中学数学教学,2000(3):38-39.
[230] 李来敏. 一道 IMO 预选题的两种证法[J]. 中学数学月刊,2000(3):48.
[231] 张善立. 一道 IMO 预选题的指数推广[J]. 中等数学,1999(5):24.
[232] 云保奇. 一道 IMO 预选题的另一个结论[J]. 中等数学,1999(4):21.
[233] 辛慧. 第 38 届 IMO 预选题解答(上) [J]. 中等数学,1998(5):28-31.
[234] 李直. 第 38 届 IMO 预选题解答(中) [J]. 中等数学,1998(6):31-35.
[235] 冼声. 第 38 届 IMO 预选题解答(中) [J]. 中等数学,1999(1):32-38.
[236] 石卫国. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 陕西教育学院学报,1998(4): 72-73.
[237] 张赟. 一道 IMO 预选题的引申[J]. 中等数学,1998(3):22-23.
[238] 安金鹏,李宝毅. 第 37 届 IMO 预选题及解答(上) [J]. 中等数学,1997(6): 33-37.
[239] 安金鹏,李宝毅. 第 37 届 IMO 预选题及解答(下) [J]. 中等数学,1998(1): 34-40.
[240] 刘江枫,李学武. 第 37 届 IMO 预选题[J]. 中等数学,1997(5): 30-32.
[241] 党庆寿. 一道 IMO 预选题的简解[J]. 中学数学月刊,1997(8):43-44.
[242] 黄汉生. 一道 IMO 预选题的加强[J]. 中等数学,1997(3):17.

[243] 贝嘉禄. 一道国际竞赛预选题的加强[J]. 中学数学月刊,1997(6):26-27.
[244] 王富英. 一道 IMO 预选题的推广及其应用[J]. 中学数学教学参,1997(8～9):74-75.
[245] 孙哲. 一道 IMO 预选题的简证与加强[J]. 中等数学,1996(3):18.
[246] 李学武. 第 36 届 IMO 预选题及解答(下)[J]. 中等数学,1996(6): 26-29,37.
[247] 张善立. 一道 IMO 预选题的简证[J]. 中等数学,1996(10): 36.
[248] 李建泉. 利用根轴的性质解一道 IMO 预选题[J]. 中等数学,1996(4): 14.
[249] 黄虎. 一道 IMO 预选题妙解及推广[J]. 中等数学,1996(4): 15.
[250] 严鹏. 一道 IMO 预选题探讨[J]. 中等数学,1996(2): 16.
[251] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(上)[J]. 中等数学,1995(6): 28-31.
[252] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(中)[J]. 中等数学,1996(1): 29-31.
[253] 杨桂芝. 第 34 届 IMO 预选题解答(下)[J]. 中等数学,1996(2): 21-23.
[254] 舒金银. 一道 IMO 预选题简证[J]. 中等数学,1995(1): 16-17.
[255] 黄宣国,夏兴国. 第 35 届 IMO 预选题[J]. 中等数学,1994(5): 19-20.
[256] 苏淳,严镇军. 第 33 届 IMO 预选题[J]. 中等数学,1993(2): 19-20.
[257] 耿立顺. 一道 IMO 预选题的简单解法[J]. 中学教研,1992(05):26.
[258] 苏化明. 谈一道 IMO 预选题[J]. 中学教研,1992(05):28-30.
[259] 黄玉民. 第 32 届 IMO 预选题及解答[J]. 中等数学,1992(1): 22-34.
[260] 朱华伟. 一道 IMO 预选题的溯源及推广[J]. 中学数学,1991(03):45-46.
[261] 蔡玉书. 一道 IMO 预选题的推广[J]. 中等数学,1990(6): 9.
[262] 第 31 届 IMO 选题委员会. 第 31 届 IMO 预选题解答[J]. 中等数学,1990(5): 7-22,封底.
[263] 单墫,刘亚强. 第 30 届 IMO 预选题解答[J]. 中等数学,1989(5):6-17.
[264] 苏化明. 一道 IMO 预选题的推广及应用[J]. 中等数学,1989(4):16-19.

后记 | Postscript

行为的背后是动机，编一部洋洋80万言的书一定要有很强的动机才行，借后记不妨和盘托出.

首先，这是一本源于“匮乏”的书.1976年编者初中一年级，时值“文化大革命”刚刚结束，物质产品与精神产品极度匮乏，学校里薄薄的数学教科书只有几个极简单的习题，根本满足不了学习的需要.当时全国书荒，偌大的书店无书可寻，学生无题可做，在这种情况下，笔者的班主任郭清泉老师便组织学生自编习题集.如果说忠诚党的教育事业不仅仅是一个口号的话，那么郭老师确实做到了.在其个人生活极为困顿的岁月里，他拿出多年珍藏的数学课外书领着一批初中学生开始选题、刻钢板、推油辊.很快一本本散发着油墨清香的习题集便发到了每个同学的手中，喜悦之情难以名状，正如高尔基所说:“像饥饿的人扑到了面包上.”当时电力紧张经常停电，晚上写作业时常点蜡烛，冬夜，烛光如豆，寒气逼人，伏案演算着自己编的数学题，沉醉其中，物我两忘.30年后同样的冬夜，灯光如昼，温暖如夏，坐拥书城，竟茫然不知所措，此时方觉匮乏原来也是一种美(想想西南联大当时在山洞里、在防空洞中，学数学学成了多少大师级人物.日本战后恢复期产生了三位物理学诺贝尔奖获得者，如汤川秀树等，以及高木贞治、小平邦彦、广中平佑的成长都证明了这一点)，可惜现在的学生永远也体验不到那种意境了(中国人也许是世界上最讲究意境的，所谓“雪夜闭门读禁书”，也是一种意境)，所以编此书颇有怀旧之感.有趣的是后来这次经历竟在笔者身上产生了“异

化”,抄习题的乐趣多于做习题,比为买椟还珠不以为过,四处收集含有习题的数学著作,从吉米多维奇到菲赫金哥尔茨,从斯米尔诺夫到维诺格拉朵夫,从笹部贞市郎到哈尔莫斯,乐此不疲.凡30年几近偏执,朋友戏称:“这是一种不需治疗的精神病.”虽然如此,毕竟染此“病症”后容易忽视生活中那些原本的乐趣.这有些像葛朗台用金币碰撞的叮当声取代了花金币的真实快感一样.匮乏带给人的除了美感之外,更多的是恐惧.中国科学院数学研究所数论室主任徐广善先生来哈尔滨工业大学讲课,课余时曾透露过陈景润先生生前的一个小秘密(曹珍富教授转述,编者未加核实).陈先生的一只抽屉中存有多只快生锈的上海牌手表.这个不可思议的现象源于当年陈先生所经历过的可怕的匮乏.大学刚毕业,分到北京四中,后被迫离开,衣食无着,生活窘迫,后虽好转,但那次经历给陈先生留下了深刻记忆,为防止以后再次陷于匮乏,就买了当时陈先生认为在中国最能保值增值的上海牌手表,以备不测.像经历过饥饿的田鼠会疯狂地往洞里搬运食物一样,经历过如饥似渴却无题可做的编者在潜意识中总是觉得题少,只有手中有大量习题集,心里才觉安稳.所以很多时候表面看是一种热爱,但更深层次却是恐惧,是缺少富足感的体现.

其次,这是一本源于“传承”的书.哈尔滨作为全国解放最早的城市,开展数学竞赛活动也是很早的,早期哈尔滨工业大学的吴从炘教授、黑龙江大学的颜秉海教授、船舶工程学院(现哈尔滨工程大学)的戴遗山教授、哈尔滨师范大学的吕庆祝教授作为先行者为哈尔滨的数学竞赛活动打下了基础,定下了格调.中期哈尔滨市教育学院王翠满教授、王万祥教授、时承权教授,哈尔滨师专的冯宝琦教授、陆子采教授,哈尔滨师范大学的贾广聚教授,黑龙江大学的王路群教授、曹重光教授,哈三中的周建成老师,哈一中的尚杰老师,哈师大附中的沙洪泽校长,哈六中的董乃培老师,为此作出了长期的努力.上世纪80年代中期开始,一批中青年数学工作者开始加入,主要有哈尔滨工业大学的曹珍富教授、哈师大附中的李修福老师及笔者.90年代中期,哈尔滨的数学奥林匹克活动渐入佳境,又有像哈师大附中刘利益等老师加入进来,但在高等学校中由于搞数学竞赛研究既不算科研又不计入工作量,所以再坚持难免会被边缘化,于是研究人员逐渐以中学教师为主,在高校中近乎绝迹.2008年CMO在哈尔滨举行,大型专业杂志《数学奥林匹克与数学文化》创刊,好戏连台,让哈尔滨的数学竞赛事业再度辉煌.

第三,这是一本源于"氛围"的书.很难想像速滑运动员产生于非洲,也无法相信深山古刹之外会有高僧.环境与氛围至关重要.在整个社会日益功利化、世俗化、利益化、平面化的大背景下,编者师友们所营造的小的氛围影响着其中每个人的道路选择,以学有专长为荣,不学无术为耻的价值观点互相感染、共同坚守,用韩波博士的话讲,这已是我们这台计算机上的硬件.赖于此,本书的出炉便在情理之中,所以理应致以敬意,借此向王忠玉博士、张本祥博士、郭梦书博士、吕书臣博士、康大臣博士、刘孝廷博士、刘晓燕博士、王延青博士、钟德寿博士、薛小平博士、韩波博士、李龙锁博士、刘绍武博士对笔者多年的关心与鼓励致以诚挚的谢意,特别是尚琥教授在编者即将放弃之际给予的坚定的支持.

第四,这是一个"蝴蝶效应"的产物.如果说人的成长过程具有一点动力系统迭代的特征的话,那么其方程一定是非线性的,即对初始条件具有敏感依赖的,俗称"蝴蝶效应".简单说就是一个微小的"扰动"会改变人生的轨迹,如著名拓扑学家,纽结大师王诗宬 1977 年时还是一个喜欢中国文学史的插队知青,一次他到北京去游玩,坐 332 路车去颐和园,看见"北京大学"四个字,就跳下车进入校门,当时他的脑子中正在想一个简单的数学问题(大多数时候他都是在推敲几句诗),就是六个人的聚会上总有三个人认识或三个人不认识(用数学术语说就是 6 阶 2 色完全图中必有单色 3 阶子图存在),然后碰到一个老师,就问他,他说你去问姜伯驹老师(我国著名数学家姜亮夫之子),姜伯驹老师的办公室就在我办公室对面.而当他找到姜伯驹教授时,姜伯驹说为什么不来试试学数学,于是一句话,一辈子,有了今天北京大学数学所的王诗宬副所长(《世纪大讲堂》,第 2 辑,辽宁人民出版社,2003:128—149).可以设想假如他遇到的是季羡林或俞平伯,今天该会是怎样.同样可以设想,如果编者初中的班主任老师是一位体育老师,足球健将的话,那么今天可能会多一位超级球迷"罗西",少一位执着的业余数学爱好者,也绝不会有本书的出现.

第五,这也是一本源于"尴尬"的书.编者高中就读于一所具有数学竞赛传统的学校,班主任是学校主抓数学竞赛的沙洪泽老师.当时成立数学兴趣小组时,同学们非常踊跃,但名额有限,可能是沙老师早已发现编者并无数学天分所以不被选中,再次申请并请姐姐(在同校高二年级)去求情均未果.遂产生逆反心理,后来坚持以数学谋生,果真由于天资不足,屡战屡败,虽自我鼓励,屡败再屡战,但其结果仍如寒山子诗所说:"用力磨碌砖,那堪将作镜."直至而立之年,幡然悔悟,但

“贼船”既上，回头已晚，彻底告别又心有不甘，于是以业余身份尴尬地游走于业界近15年，才有今天此书问世.

看来如果当初沙老师增加一个名额让编者尝试一下，后再知难而退，结果可能会皆大欢喜.但有趣的是当年竞赛小组的人竟无一人学数学专业，也无一人从事数学工作.看来教育是很值得研究的，“欲擒故纵”也不失为一种好方法.沙老师后来也放弃了数学教学工作，从事领导工作，转而研究教育，颇有所得，还出版了专著《教育——为了人的幸福》(教育科学出版社，2005)，对此进行了深入研究.

最后，这也是一本源于“信心”的书.近几年，一些媒体为了吸引眼球，不惜把中国在国际上处于领先地位的数学奥林匹克妖魔化且多方打压，此时编写这本题集是有一定经济风险的.但编者坚信中国人对数学是热爱的.利玛窦、金尼阁指出：“多少世纪以来，上帝表现了不只用一种方法把人们吸引到他身边.垂钓人类的渔人以自己特殊的方法吸引人们的灵魂落入他的网中，也就不足为奇了.任何可能认为伦理学、物理学和数学在教会工作中并不重要的人，都是不知道中国人的口味的，他们缓慢地服用有益的精神药物，除非它有知识的佐料增添味道.”(利玛窦，金尼阁，著.《利玛窦中国札记》.何高济，王遵仲，李申，译.何兆武，校.中华书局，1983，P347).中国的广大中学生对数学竞赛活动是热爱的，是能够被数学所吸引的，对此我们有充分的信心.而且，奥林匹克之于中国就像围棋之于日本，足球之于巴西，瑜伽之于印度一样，在世界上有品牌优势.2001年笔者去新西兰探亲，在奥克兰的一份中文报纸上看到一则广告，赫然写着中国内地教练专教奥数，打电话过去询问，对方声音甜美，颇富乐感，原来是毕业于沈阳音乐学院的女学生，在新西兰找工作四处碰壁后，想起在大学念书期间勤工俭学时曾辅导过小学生奥数，所以，便想一试身手，果真有家长把小孩送来，她便也以教练自居，可见数学奥林匹克已经成为一种类似于中国制造的品牌.出版这样的书，担心何来呢！

数学无国界，它是人类最共性的语言.数学超理性多呈冰冷状，所以一个个性化的，充满个体真情实感的后记是需要的，虽然难免有自恋之嫌，但毕竟带来一丝人气.

刘培杰
2014年9月